9.1. Kompositionen

(a) Sei $s_n \to s_0$ für $n \to \infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Gemäss Satz 3.6.1 gilt dann auch $(s_n, 0) \to (s_0, 0)$ und $(0, s_n) \to (0, s_0)$ in $\mathbb{R}^2$ für $n \to \infty$. Daher sind die Einbettungen ι_1, ι_2 stetig. Ist umgekehrt $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ für $n \to \infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^2$, so konvergieren nach Satz 3.6.1 $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$. Daher sind die Projektionen p_1, p_2 stetig. Ferner folgt $x_n y_n \to x_0 y_0$ aus den Grenzwertsätzen (Satz 3.3.2). Folglich ist auch die Multiplikation m stetig.

(b) Es gilt $f = \iota_1 \circ (p_1 + p_2) + \iota_2 \circ (p_1 + p_2)$, denn

$$(x + y, x + y) = \iota_1\Big(p_1(x, y) + p_2(x, y)\Big) + \iota_2\Big(p_1(x, y) + p_2(x, y)\Big).$$

Ferner gilt $g = m \circ \Big(\iota_1 \circ (p_1 - p_2) + \iota_2 \circ (p_1 - p_2)\Big)$, denn

$$(x - y)^2 = m\Big(p_1(x, y) - p_2(x, y), p_1(x, y) - p_2(x, y)\Big).$$

Eine derartige Zerlegung ist nicht eindeutig. Wenden wir etwa zuerst die binomische Formel an, erhalten wir $g = m\circ(\iota_1\circ p_1+\iota_2\circ p_1)-2m\circ(\iota_1\circ p_1+\iota_2\circ p_2)+m\circ(\iota_1\circ p_2+\iota_2\circ p_2)$.

Offenbar gilt $p_1 \circ f = p_2 \circ f$. Daher ist das Bild von f Teilmenge der Diagonalen $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = y\}$. Sei umgekehrt $(s, s) \in D$ ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen. Dann ist $(s, 0) \in \mathbb{R}^2$ im Definitionsbereich von f und $f(s, 0) = (s, s)$. Somit ist D Teilmenge des Bilds von f. Insgesamt folgt, dass D das Bild von f ist.

9.2. Punktmengentopologie

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Teilmenge $M = \{(x, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\,;\ x > 0\} \cup \{(-1, 0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$ ist nicht offen, denn $(-1, 0, \ldots, 0) \in M$ ist kein innerer Punkt. Falls $n \geq 2$ ist das Innere von M sogar leer. Ferner ist M nicht abgeschlossen, denn $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ist kein innerer Punkt des Komplements. Schliesslich ist M unbeschränkt, denn $(n, 0, \ldots, 0) \in M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Teilmenge. Sei $a \in A$ beliebig. Für jedes $r > 0$ enthält der Ball $B_r(a)$ unendlich viele Punkte und kann daher keine Teilmenge von A sein. Somit ist das Innere von A die leere Menge: $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

Sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ein beliebiger Punkt im Komplement. Dann ist der Abstand von p zu A eine positive Zahl $\delta := \min\{\|p - a_k\|\,;\ k = 1, \ldots, m\} > 0$, da das Minimum einer *endlichen* Menge positiver Zahlen stets existiert und positiv ist. Nach Konstruktion ist der Ball $B_{\frac{\delta}{2}}(p) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ im Komplement enthalten. Somit ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen und A abgeschlossen. Es folgt $\operatorname{clos}(A) = A$.

Schliesslich ist $\partial A = \operatorname{clos}(A) \setminus \operatorname{int}(A) = A \setminus \emptyset = A$ der Rand von A. Jeder Punkt einer endlichen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist somit ein Randpunkt.

Eine endliche Teilmenge $\mathbb{R}^n$ ist offenbar beschränkt, wie oben gezeigt abgeschlossen und somit stets kompakt.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Als kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist K beschränkt und abgeschlossen. $A \cap K$ ist abgeschlossen als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen. Ferner ist $A \cap K \subset K$ beschränkt als Teilmenge einer beschränkten Menge. Somit ist $A \cap K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$A^{\complement}$ ist das Komplement einer abgeschlossenen Menge und damit offen. $\Omega \setminus A = \Omega \cap A^{\complement}$ ist der Schnitt zweier offner Mengen und damit ebenfalls offen.

$\Omega^{\complement}$ ist das Komplement einer offenen Menge und damit abgeschlossenen. $A \setminus \Omega = A \cap \Omega^{\complement}$ ist der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen und damit ebenfalls abgeschlossenen.

(d) Es gilt

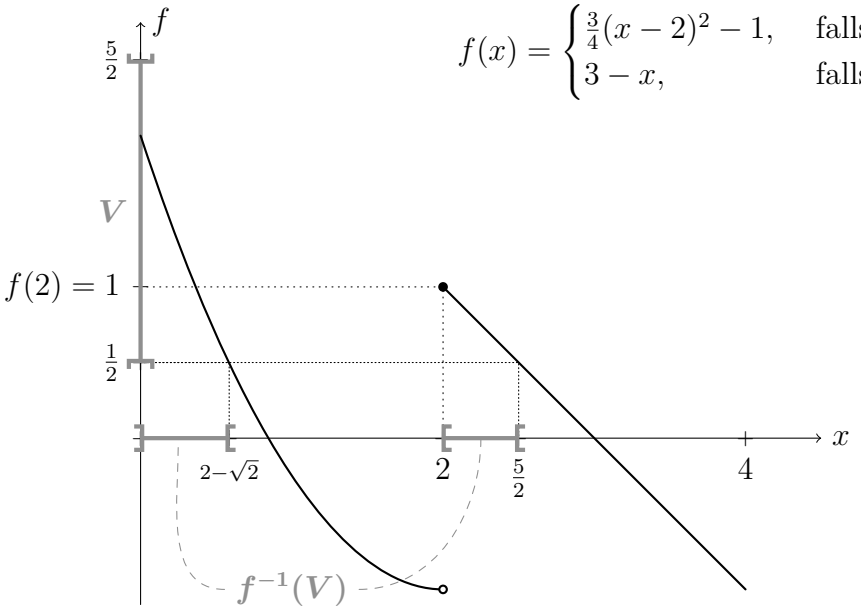
$$\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, r < \|x\| < R\} = B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)},$$

wobei $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| < r\}$ der offene Ball um 0 mit Radius R ist und $\overline{B_r(0)}$ den Abschluss von $B_r(0)$ meint. Somit folgt direkt aus (c), dass $\mathcal{O}$ offen ist.

9.3. Topologisches Kriterium Graph und Vorschrift von $f\colon\ ]0,4[\ \to \mathbb{R}$ sind

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-2)^2 - 1, & \text{falls } 0 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{falls } 2 \le x < 4. \end{cases}$$



(b) Das offene Intervall $V = \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[$ ist eine Umgebung von $f(2) = 1$ in $\mathbb{R}$. Um das Urbild von V zu bestimmen, beobachten wir, dass beide „Stücke“ von $f(x)$ auf ihrem Definitionsbereich jeweils monoton fallen. Wie sehen leicht, dass $f(2-\sqrt{2}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ und $f(\frac{5}{2}) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. Daher gilt

$$f^{-1}(V) = \left]0, 2-\sqrt{2}\right[\cup \left[2, \tfrac{5}{2}\right[.$$

Dies ist *keine* Umgebung von 2 relativ zu $\Omega =]0, 4[$, denn für alle $0 < r < 1$ ist

$$B_r(2) \cap \Omega =]2 - r, 2 + r[$$

aber $2 - \frac{r}{2} \notin f^{-1}(V)$. Das heisst, egal wie klein r gewählt wird, $B_r(2) \cap \Omega$ ist nie eine Teilmenge von $f^{-1}(V)$.

9.4. Fixpunkt Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine beliebige stetige Funktion.

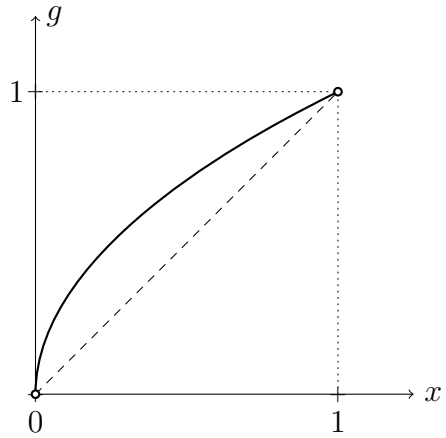
(a) Wir definieren die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $g(x) = x - f(x)$. Dann gilt $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$. Daher folgt die Behauptung, wenn wir zeigen, dass g in $[0,1]$ eine Nullstelle besitzt.

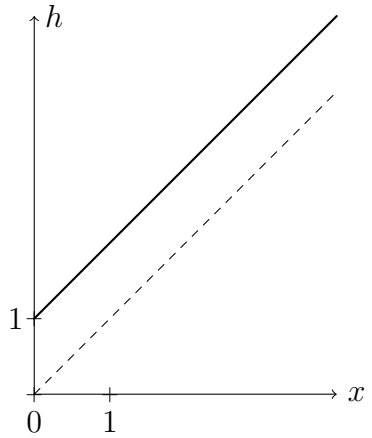
$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist als Differenz stetiger Funktionen stetig. Aus $\forall x \in [0,1] : f(x) \in [0,1]$ folgt $g(0) = -f(0) \leq 0$ und $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$. Daher ist der Zwischenwertsatz anwendbar, und es folgt, dass zu $0 \in [g(0), g(1)]$ ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ existiert.

(b) Die Funktionen

$$g\colon\ ]0,1[\to]0,1[\,, \qquad x \mapsto \sqrt{x} \qquad\qquad h\colon\ [0,\infty[\to [0,\infty[\,, \qquad x \mapsto x+1$$

sind stetig, haben aber beide keinen Fixpunkt: Zum einen gilt $\forall x \in]0,1[: \sqrt{x} > x$. Zum anderen ist $\forall x \geq 0 : h(x) - x = 1 > 0$.





(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Analog zu (a) definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [0, 1 - \tfrac{1}{n}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(x + \tfrac{1}{n}) \end{aligned}$$

und zeigen indirekt, dass g stets eine Nullstelle besitzt. Angenommen, $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] : g(x) > 0$. Das bedeutet $f(x) > f(x + \frac{1}{n})$. Dann folgt für $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ sukzessiv

$$0 = f(0) > f(\tfrac{1}{n}) > f(\tfrac{2}{n}) > \ldots > f(\tfrac{n-1}{n}) > f(1) = 0,$$

was zu einem Widerspruch führt. Falls $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] : g(x) < 0$ folgt analog

$$0 = f(0) < f(\tfrac{1}{n}) < f(\tfrac{2}{n}) < \ldots < f(\tfrac{n-1}{n}) < f(1) = 0,$$

was ebenso zu einem Widerspruch führt. Somit besitzt g eine Nullstelle.