10.1. Zwischenwerte Wir beweisen zunächst Stetigkeit der gegebenen Funktion

$$\begin{aligned} f\colon\ ]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Die Wurzelfunktion ist stetig, und $1-x^2>0$ für $x\in\,]-1,1[$. Somit ist $\sqrt{1-x^2}$ eine Komposition stetiger Funktionen mit strikt positiven Werten. Daraus folgt, dass $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $]-1,1[$ stetig ist. Damit ist auch f stetig als Produkt stetiger Funktionen.

Behauptung. f ist streng monoton wachsend und damit injektiv.

Beweis. Für $0<x<1$ gilt $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$. In diesem Bereich ist

$$\begin{aligned}
&x\mapsto x^2 \quad \text{streng monoton wachsend,}\\
&x\mapsto \tfrac{1}{x^2} \quad \text{streng monoton fallend,}\\
&x\mapsto \sqrt{\tfrac{1}{x^2}-1} \quad \text{streng monoton fallend,}\\
&x\mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x2}-1}}=f(x) \quad \text{streng monoton wachsend.}
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x)>0=f(0)$. Folglich ist f streng monoton wachsend in $[0,1[$. Wegen Punktsymmetrie $f(-x)=-f(x)$ folgt daraus für $x_1<x_2\leq 0$, dass $f(x_1)=-f(-x_1)<-f(-x_2)=f(x_2)$. Somit ist f überall streng monoton wachsend und damit injektiv. □

Behauptung. f ist surjektiv.

Beweis. Es gilt $f(x)\to\infty$ für $1>x\to 1$ sowie $f(x)\to-\infty$ für $-1<x\to-1$, da der Nenner dann gegen Null und der Zähler gegen $+1$ beziehungsweise -1 konvergiert. Da f stetig und streng monoton wachsend ist, folgt die Behauptung aus Satz 4.6.3. □

10.2. Funktionenfolgen

(a) $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^2$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ für $n\to\infty$ punktweise aber nicht gleichmässig.

Sei $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt in der Tat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\right)^2=1^2=1.$$

Folglich konvergiert f_n punktweise gegen die konstante Funktion $f(x) = 1$. Allerdings gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| f_n(x) - 1 \Big| \geq \Big| f_n(-n) - 1 \Big| = |-1| = 1 \nrightarrow 0.$$

Somit ist die Konvergenz nicht gleichmässig.

(b) $g_n(x) = x + x^n(1-x)^n$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmässig gegen $g(x) = x$.

Um dies zu zeigen, beobachten wir zunächst, dass

$$\forall x \in [0,1]: \quad 0 \leq x(1-x) = x - x^2 = \tfrac{1}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4}.$$

Somit gilt wie behauptet

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big| g_n(x) - x \Big| = \sup_{x\in[0,1]} \Big| \Big(x(1-x) \Big)^n \Big| \leq \Big(\tfrac{1}{4} \Big)^n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(c) $h_n(x) = \sqrt[n]{x}$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise aber nicht gleichmässig gegen

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

In der Tat gilt $h_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $h_n(a) = \sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$ und jedes feste $a > 0$. Da alle Folgenglieder h_n stetig sind, die Grenzfunktion h aber nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmässig sein.

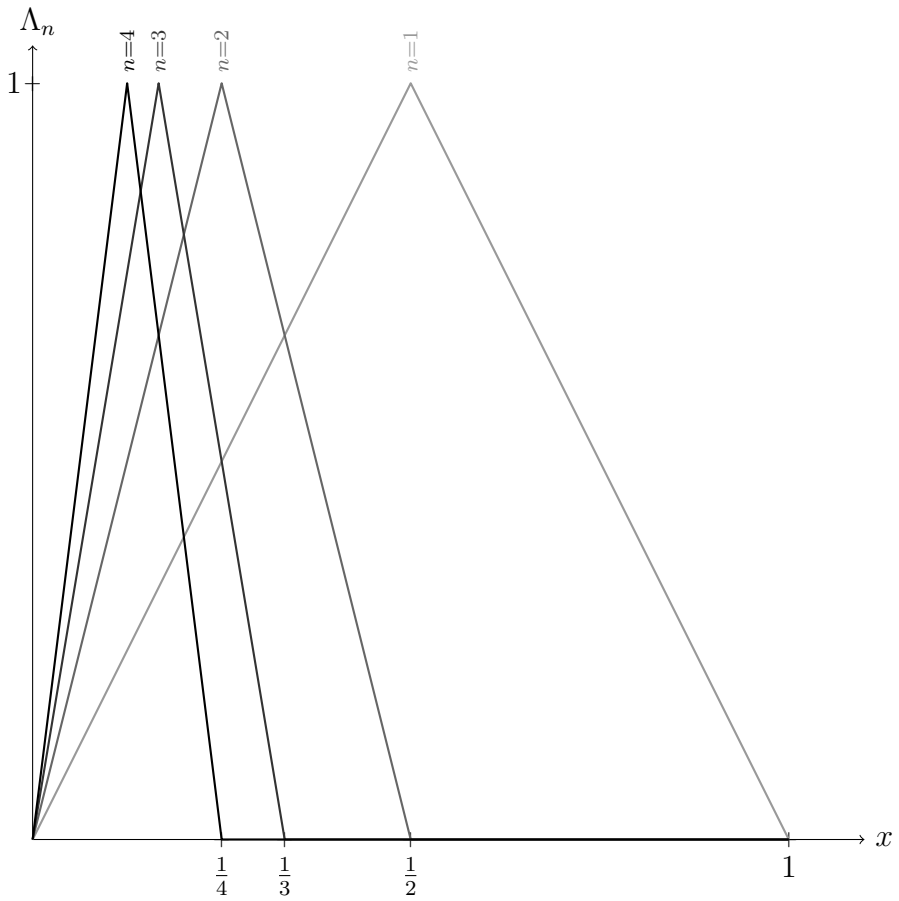
(d) Die Folge $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmässig gegen $\Lambda(x) = 0$.

Sei $x_0 \in [0,1]$ beliebig. Im Fall $x_0 = 0$ ist $\Lambda_n(x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $x_0 > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_0 > \frac{1}{n_0}$. Dann gilt $\forall n \geq n_0 : x_0 > \frac{1}{n}$, woraus folgt $\forall n \geq n_0 : \Lambda_n(x_0) = 0$. Daraus folgt die punktweise Konvergenz.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt andererseits

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big| \Lambda_n(x) - 0 \Big| \geq \Big| \Lambda_n(\tfrac{1}{2n}) \Big| = 1,$$

weshalb die Konvergenz $\Lambda_n(x) \to 0$ nicht gleichmässig ist. Nachfolgende Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$.



10.3. Ungleichmässigkeit

(a) Um punktweise Konvergenz der Folge $f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ zu zeigen, unterscheiden wir folgende Fälle.

Fall $0 \leq x < 1$. Dann konvergiert $x^n \to 0$ und $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1} \to -1$ für $n \to \infty$.

Fall $x = 1$. Es gilt $f_n(1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heisst, $f_n(1) \to 0$ für $n \to \infty$.

Fall $x > 1$. Dann gilt $x^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$ und es folgt $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1} = \frac{1-x^{-n}}{1+x^{-n}} \to 1$.

Die punktweise Grenzfunktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{falls } x = 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Da alle Folgenglieder f_n stetig sind, $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ aber nicht stetig ist, kann die Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ nicht gleichmässig sein.

(b) An der Stelle $x = 0$ gilt $g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \neq 0$ erkennen wir eine geometrische Summe in

$$g_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2 \sum_{k=0}^{n} \Big(q(x)\Big)^k = x^2 \frac{1-q(x)^{n+1}}{1-q(x)}, \quad q(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Da $|q(x)| < 1$ für alle $x \neq 0$, konvergiert $g_n(x)$ im Fall $x \neq 0$ gegen

$$\frac{x^2}{1-q(x)} = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

für $n \to \infty$. Die punktweise Grenzfunktion ist somit

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1 + x^2, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Da alle Folgenglieder g_n stetig sind, $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ aber nicht stetig ist, kann die Konvergenz $g_n(x) \to g(x)$ nicht gleichmässig sein.

10.4. Erste Ableitungen Die Funktion $f(x) = 6x^7 + \frac{14}{x^3}$ ist definiert und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Ableitung ist $f'(x) = 42x^6 - 42x^{-4}$.

Die Funktion $g(x)$ ist definiert und differenzierbar auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. Es gilt

$$g(x) = \frac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2(x+1)}{x+2} = \frac{x^3+x^2}{x+2}.$$

Nun gilt mit der Quotientenregel

$$g'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x+2) - (x^3+x^2)}{(x+2)^2}.$$

Die Funktion $h(x) = \frac{x}{1+x}$ ist definiert und differenzierbar auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit

$$h'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Die Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(x_0, h(x_0))$ ist

$$y = h(x_0) + h'(x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{x_0}{1+x_0} + \frac{x - x_0}{(1+x_0)^2}.$$

Bei $x_0 = -2$ ist dies $y = 2 + (x+2) = x + 4$. Um den Graphen von h zu zeichnen, beobachten wir, dass $h(x) = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{x+1}$. Wir bekommen also den Graphen von h, indem wir den Graphen der Hyperbel $-\frac{1}{x}$ um 1 nach oben und 1 nach links verschieben.

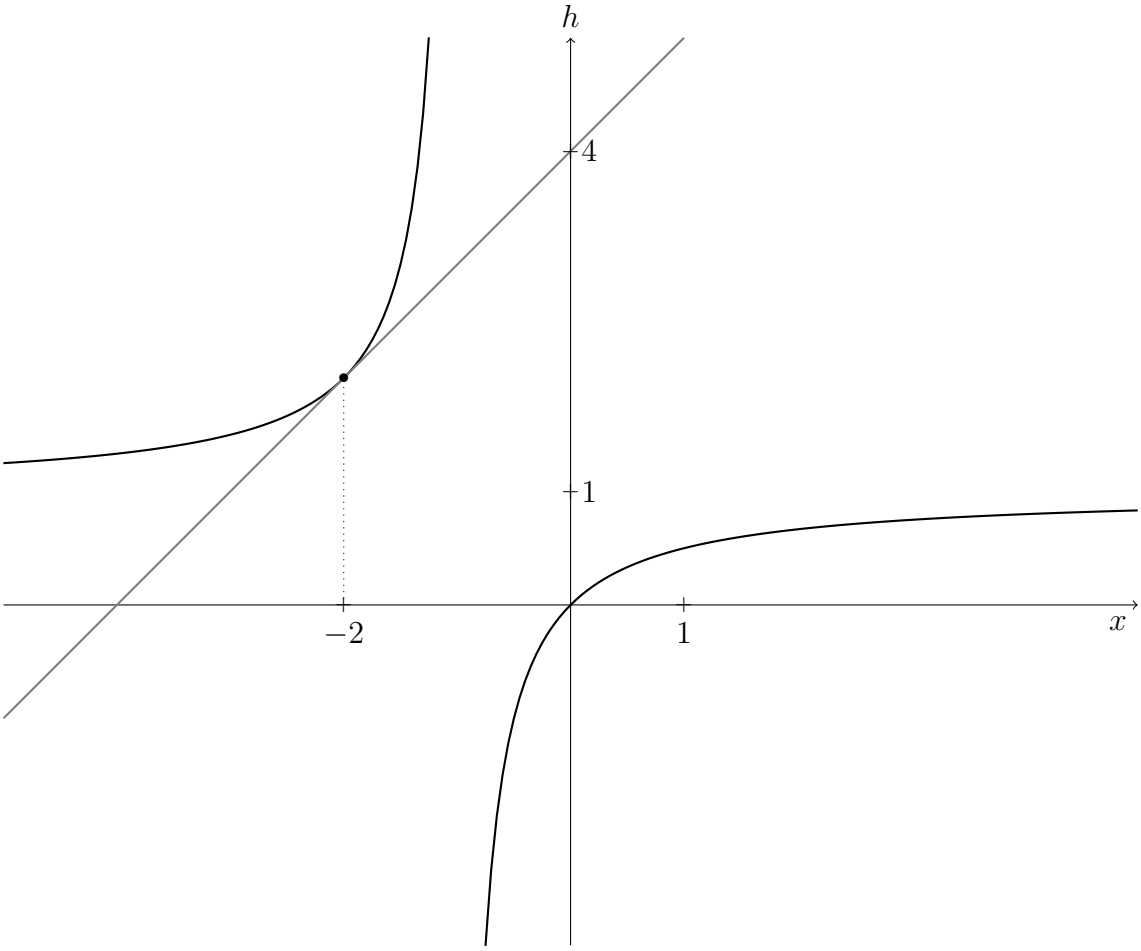


Abbildung 1: Graph der Funktion $h(x) = \frac{x}{1+x}$ mit Tangente an $(-2, 2)$.