12.1. Potenzreihe Wegen $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ hat die Potenzreihe

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{1} = 1$ und ist somit für $x = \frac{6}{7} < 1$ konvergent. Überdies gilt

$$\varphi(x) = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)' = x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Wir haben also eine explizite Formel für die Reihe gefunden und erhalten damit

$$\varphi(\tfrac{6}{7}) = \tfrac{6}{7}(1-\tfrac{6}{7})^{-2} = \tfrac{6}{7}\cdot 7^2 = 42.$$

12.2. Nullstellen Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Angeommen, f ist stetig und hat Nullstellen $x_1 < x_2$ in I. Dann ist auch die Einschränkung von f auf das kompakte Intervall $[x_1, x_2]$ stetig. Nach Satz 4.2.3 nehmen stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und Minimum an.

Falls $\forall x \in [x_1, x_2] : f(x) = 0$, so ist jedes $\xi \in \,]x_1, x_2[$ eine lokale Extremalstelle. Andernfalls existiert $t \in \,]x_1, x_2[$ mit $f(t) \neq 0$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Falls $f(t) > 0$, so ist auch das Maximum von f in $[x_1, x_2]$ (welches nach Satz 4.2.3 existiert) strikt positiv und wird daher im offenen Intervall $]x_1, x_2[$ angenommen.

Falls $f(t) < 0$, so ist auch das Minimum von f in $[x_1, x_2]$ strikt negativ und wird daher im offenen Intervall $]x_1, x_2[$ angenommen.

In beiden Fällen erhalten wir eine Extremalstelle $\xi \in \,]x_1, x_2[$ im offenen Intervall.

(b) Angenommen f ist differenzierbar und hat $k+1$ Nullstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$. Aus (a) folgt, dass in jedem der k offenen Intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ mindestens eine lokale Extremalstelle von f liegt. Da die Ableitung f' an lokale Extremalstellen von f verschwindet, folgt, dass f' mindestens k Nullstellen besitzt.

Angenommen, f' hat höchstens $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen. Dann muss gelten $k \leq n$. Es folgt $k+1 \leq n+1$, das heisst, f hat höchstens $n+1$ Nullstellen.

(c) Gesucht ist die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - x^2$. Als Differenz solcher Funktionen ist f beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen

$$f(x) = e^{x\log 2} - x^2, \qquad f''(x) = (\log 2)^2\, e^{x\log 2} - 2,$$
$$f'(x) = (\log 2)\, e^{x\log 2} - 2x, \qquad f'''(x) = (\log 2)^3\, e^{x\log 2} > 0.$$

Es folgt, dass f''' strikt positiv ist und damit keine Nullstellen hat. Dreimalige Anwendung von Aussage (b) zeigt, dass f'' höchstens eine, f' höchstens zwei und f höchstens drei Nullstellen hat.

Aus dem Zwischenwertsatz folgern wir, dass f mindestens drei Nullstellen hat. Es gilt

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-1} - (-1)^2 = -\tfrac{1}{2} < 0, & f(3) &= 2^3 - 3^2 = -1 < 0, \\ f(0) &= 2^0 - 0^2 = 1 > 0, & f(5) &= 2^5 - 5^2 = 7 > 0 \end{aligned}$$

Da f stetig ist, befindet sich in jedem der Intervalle $]-1,0[$, $]0,3[$, $]3,5[$ mindestens eine Nullstelle. Insgesamt folgt, dass f genau drei Nullstellen hat. Die Gleichung $2^x = x^2$ hat somit genau drei reelle Lösungen.

12.3. Taylor-Annäherung Wir betrachten $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in einer Umgebung der Stelle $x = 65$. Der nächste Punkt mit bekanntem Wert ist $x_0 = 64$ mit $f(64) = 4$. Die Taylor-Entwicklung m-ter Ordnung von f um den Punkt x_0 sowie die Abschätzung des Restglieds lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_m f(x;x_0), \\ |r_m f(x;x_0)| &\leq \sup_{x_0<\xi<x} \left|f^{(m+1)}(\xi)\right| \frac{(x-x_0)^{m+1}}{m!}. \end{aligned}$$

Die Ordnung m ist so zu wählen, dass $|r_m f(65;64)| \leq \frac{1}{1000}$. Dazu berechnen wir

$$f^{(m+1)}(x) = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}-1)(\tfrac{1}{3}-2)\cdots(\tfrac{1}{3}-m)\cdot x^{\frac{1}{3}-m-1}.$$

$x \mapsto x^{\frac{1}{3}-m-1}$ ist monoton fallend, daher ist $\sup\limits_{x_0<\xi<x} |x^{\frac{1}{3}-m-1}| = x_0^{\frac{1}{3}-m-1}$ und es folgt

$$\begin{aligned} |r_m f(65;64)| &\leq \left|\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}-1)(\tfrac{1}{3}-2)\cdots(\tfrac{1}{3}-m)\right| \cdot 64^{\frac{1}{3}-m-1} \cdot \frac{(65-64)^{m+1}}{m!} \\ &= \frac{1}{3}\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{1}\right|\left|\frac{\frac{1}{3}-2}{2}\right|\cdots\left|\frac{\frac{1}{3}-m}{m}\right| \cdot 2^{-4-6m} < 2^{-4-6m}. \end{aligned}$$

Für $m = 0$ ist $2^{-4} = \frac{1}{16}$ noch nicht hinreichend, doch bereits für $m = 1$ ist der Abschätzungsfehler kleiner als $2^{-4-6} = \frac{1}{1024}$. Somit genügt eine Taylor-Approximation 1. Ordnung. Als Näherungswert für $\sqrt[3]{65}$ erhalten wir

$$T_1 f(65;64) = f(64) + f'(64)\cdot(65-64) = 4 + \tfrac{1}{3}64^{-\frac{2}{3}} = 4 + \tfrac{1}{48} = \tfrac{193}{48}.$$

12.4. Taylor-Polynome Das Taylor-Polynom 4. Grades einer Funktion $f \in C^4$ um den Punkt x_0 ist gegeben durch

$$T_4 f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}(x - x_0)^k$$

(a) $p(x) = -x^3$ ist ein Polynom dritten Grades und muss daher mit seinem Taylor-Polynom 4. Grades überein. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} &p(x) = -x^3, \quad p'(x) = -3x^2, \quad p''(x) = -6x, \quad p'''(x) = -6, \quad p''''(x) = 0, \\ &p(2) = -8, \quad p'(2) = -12, \quad p''(2) = -12, \quad p'''(2) = -6, \quad p''''(2) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} T_4 p(x; 2) &= -8 - \frac{12}{1!}(x-2) - \frac{12}{2!}(x-2)^2 - \frac{6}{3!}(x-2)^3 + 0 \\ &= -8 - 12(x-2) - 6(x^2 - 4x + 4) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = -x^3. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = (1+x)^{-1}$ hat bei $x_0 = \frac{1}{2}$ den Wert $(\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1+x)^{-2}, & f'(\tfrac{1}{2}) &= -(\tfrac{2}{3})^2, \\ f''(x) &= 2(1+x)^{-3}, & f''(\tfrac{1}{2}) &= 2(\tfrac{2}{3})^3, \\ f'''(x) &= -3!(1+x)^{-4}, & f'''(\tfrac{1}{2}) &= -3!(\tfrac{2}{3})^4, \\ f''''(x) &= 4!(1+x)^{-5}, & f''''(\tfrac{1}{2}) &= 4(\tfrac{2}{3})^5. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$T_4 f(x)(x; \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} - (\tfrac{2}{3})^2(x - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{2}{3})^3(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{2}{3})^4(x - \tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{2}{3})^5(x - \tfrac{1}{2})^4$$

Bemerkung. Anders als bei (a) ist Ausmultiplizieren hier wenig sinnvoll. Taylor-Polynome approximieren die Funktion in der Nähe von x_0, deshalb sind Potenzen von $(x - x_0)$ in der Regel vorteilhafter als Potenzen von x.

Alternative. Wir basteln aus f eine geometrische Reihe. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\frac{3}{2} - (\frac{1}{2} - x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - x)} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2} - x)\Big)^k.$$

Ableiten der Potenzreihe zeigt, dass sie mit der Taylor-Reihe von f an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ übereinstimmt. Es folgt

$$T_4 f(x; \tfrac{1}{2}) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{4} \Big(\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2} - x)\Big)^k.$$

(c) Es gilt $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$ sowie $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
g(x) &= \log(\cos x), & g(\tfrac{\pi}{4}) &= \log(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{2}\log(2),\\
g'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, & g'(\tfrac{\pi}{4}) &= -1,\\
g''(x) &= -1 - (\tan x)^2, & g''(\tfrac{\pi}{4}) &= -2\\
g'''(x) &= -2(\tan x)(1 + (\tan x)^2), & g'''(\tfrac{\pi}{4}) &= -4\\
g''''(x) &= -2(1 + (\tan x)^2)^2 & g''''(\tfrac{\pi}{4}) &= -2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2\\
&\quad - 4(\tan x)^2(1 + (\tan x)^2), & &= -16.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
T_4 g(x; \tfrac{\pi}{4}) &= -\tfrac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{1!}(x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{2}{2!}(x - \tfrac{\pi}{4})^2 - \frac{4}{3!}(x - \tfrac{\pi}{4})^3 - \frac{16}{4!}(x - \tfrac{\pi}{4})^4\\
&= -\tfrac{1}{2}\log 2 - (x - \tfrac{\pi}{4}) - (x - \tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{2}{3}(x - \tfrac{\pi}{4})^3 - \tfrac{2}{3}(x - \tfrac{\pi}{4})^4.
\end{aligned}$$

(d) $h(x) = \cos x$ hat bei $x_0 = 0$ den Wert $h(0) = 1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&h'(x) = -\sin x, && h''(x) = -\cos x, && h'''(x) = \sin x, && h''''(x) = \cos x\\
&h'(0) = 0, && h''(0) = -1, && h'''(0) = 0, && h''''(0) = 1.
\end{aligned}$$

Somit folgt $T_4 h(x; 0) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$.

(e) Für $u(x) = e^{x^2}$ bedienen wir uns bei der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion. Es gilt

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Somit folgt $T_4 u(x; 0) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$.

(f) Für $v(x) = \cos(e^{x^2} - 1)$ bedienen wir uns wie folgt bei (d) und (e). Wir schreiben formal „$(\dots)$“ für Potenzen von x höherer Ordnung als 4 und erhalten

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - 1 &= x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \dots\\
\cos(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \dots\\
\Rightarrow \quad \cos(e^{x^2} - 1) &= 1 - \tfrac{1}{2}(x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \dots)^2 + \tfrac{1}{4!}(x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \dots)^4 + \dots\\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x^4 + \dots
\end{aligned}$$

Da $T_4 v(x; 0)$ keine Potenzen von x höherer Ordnung als 4 enthalten kann, folgt

$$T_4 v(x; 0) = 1 - \tfrac{1}{2}x^4.$$

12.5. Taylor-Reihe Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Komposition differenzierbarer Funktionen. Dort gilt

$$f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Leiten wir einen Term der Form $x^{-n}e^{-\frac{1}{x^2}}$ ab, so erhalten wir nach Produkt- und Kettenregel $-nx^{-n-1}e^{-\frac{1}{x^2}} + 2x^{-n-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ welches wieder eine Summe von Termen derselben Form ist. Somit ist $f^{(k)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für beliebiges k eine Summe von Termen der Form $x^{-n}e^{-\frac{1}{x^2}}$ für unterschiedliche $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung. Es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Als Induktionsanfang dient $f(0) = 0$. Angenommen, die Behauptung gilt für gewisses $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Der Differenzenquotient für $f^{(k+1)}(0)$ lautet dann

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(k)}(x)}{x}$$

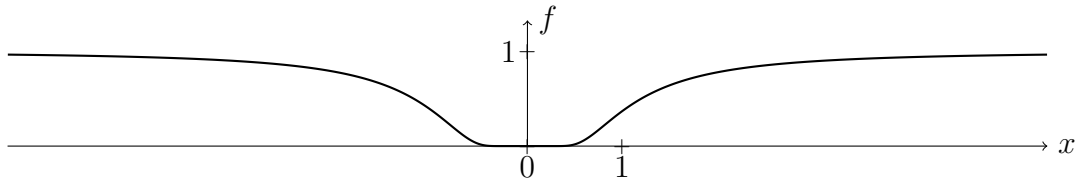
und ist wie oben gezeigt, eine endliche Summe von Termen der Form

$$\frac{x^{-n}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{n+1}}$$

für unterschiedliche $n \in \mathbb{N}$. Substituieren wir $x^2 = \frac{1}{t}$ für $x > 0$, so erhalten wir

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{n+1}} = \frac{e^{-t}}{(\frac{1}{t})^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{t^{\frac{n+1}{2}}}{e^t}.$$

Für $t \to \infty$ konvergiert letzteres gegen Null analog zu Beispiel 3.2.2. iv). $t \to \infty$ ist äquivalent zu $0 < x \to 0$. Selbiges gilt, falls $x < 0$, wobei bei geradem n das Vorzeichen zu wechseln ist. Somit gilt wie behauptet

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0. \qquad \square$$

Da alle Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 0$ verschwinden, ist die Taylor-Reihe von f an dieser Stelle konstant Null und stimmt daher lediglich bei x_0 mit f überein.