2.1. Abbildungen

(a) Geben Sie soweit möglich für die folgenden Paare von Mengen je ein Beispiel einer injektiven, surjektiven oder bijektiven Abbildung an. Die erste Menge soll jeweils der Definitionsbereich, die zweite der Bildbereich sein. Wo ist dies nicht möglich?

$$\{1, 2, 3\} \to \{3, 6, 9\},$$

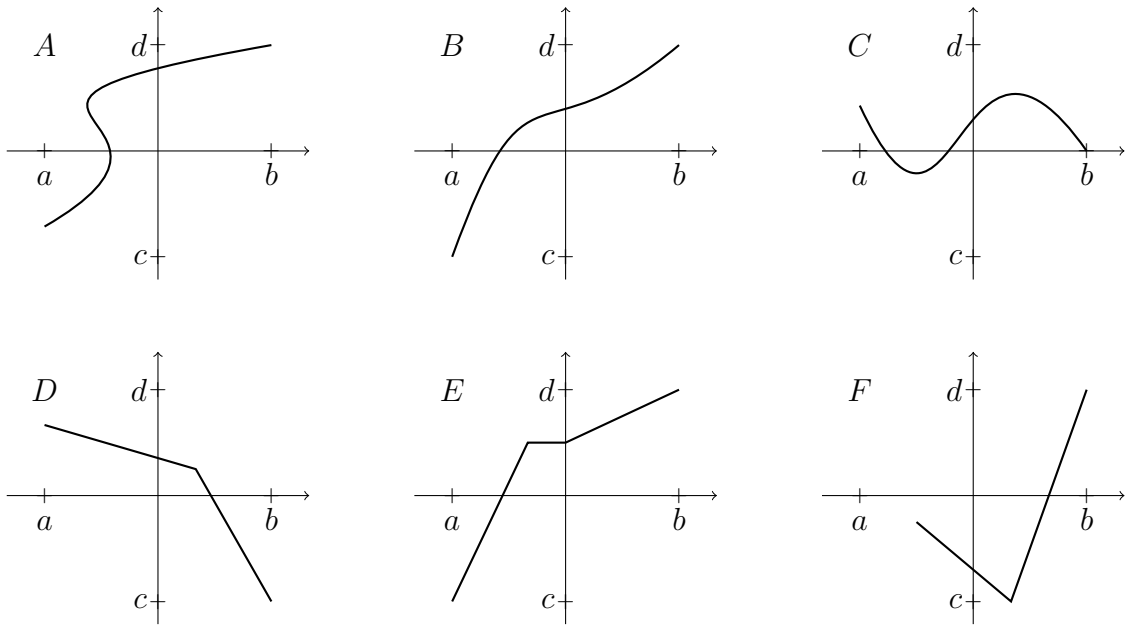
$$\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\} \to \{\mathtt{A}, \mathtt{10}, \mathtt{K}, \mathtt{D}, \mathtt{B}, \mathtt{9}, \mathtt{8}, \mathtt{7}\},$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

(b) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wir erinnern an die Definition des *abgeschlossenen Intervalls*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x \leq b\}.$$

Stellen die folgenden Bilder den Graphen einer Funktion $[a, b] \to [c, d]$ dar? Falls ja, ist diese Funktion dann injektiv, surjektiv oder bijektiv?



(c) Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definieren wir das *offene Intervall*

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\}.$$

Sind folgende Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv?

$$f\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \qquad g\colon [0, \pi] \to [0, 1] \qquad h\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$$
$$\varphi \mapsto \sin(\varphi) \qquad \varphi \mapsto \sin(\varphi) \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x$$

2.2. Bild und Urbild (schriftlich) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

(a) $f(x) = x^2$,

(b) $f(x) = x^3 + 1$,

(c) $f(x) = \sin(x)$.

Bestimmen Sie jeweils

- die Bildmenge $f\Big([-1,1]\Big)$,
- die Urbildmengen $f^{-1}\Big(\{-1\}\Big)$ und $f^{-1}\Big([0,1]\Big)$

und untersuchen Sie, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar ist. Falls ja, was ist die Umkehrfunktion?

2.3. Mengen Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir erinnern an die Definition des Absolutbetrags

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| \geq 3$.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \geq |x| - 2$.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x+2} \geq 2 - x.$$

(d) Zeichnen Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$.

2.4. Supremum und Infimum Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen und prüfen Sie, ob diese Mengen ein Maximum oder ein Minimum besitzen.

$$A = \left\{ \tfrac{|x|}{1+|x|}\,;\ x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$B = \left\{ x + \tfrac{1}{x}\,;\ \tfrac{1}{2} < x \leq 2 \right\},$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}\,;\ \exists y \in \mathbb{R} : (x+1)^2 + 4(y-2)^2 < 4 \right\}. \qquad \text{(Zeichnung!)}$$

Hinweis. Erraten Sie Supremum und Infimum und beweisen Sie die Vermutung.