4.1. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos(\tfrac{\pi}{3}n), \qquad b_n = \sin(n\pi + \tfrac{1}{n}),$$

$$c_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}, \qquad d_n = \sqrt{n(n+2)} - n,$$

$$e_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \qquad f_n = \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{2}, \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

4.2. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n: \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

4.3. Arithmetische Mittel Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente, reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ebenfalls gegen a konvergiert. Existieren divergente Folgen mit konvergenten arithmetischen Mittel? Falls ja, geben Sie ein Beispiel.

4.4. Gold rekursiv Beweisen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

monoton wächst und durch $c = 2$ beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

4.5. Binomialkoeffizienten Für ganze Zahlen $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

wobei die *Fakultät* $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert ist als

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Folgende Anordnung ist bekannt als *Pascalsches Dreieck*.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\iddots & & & & & & & & \ddots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Beweisen Sie die Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks: Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) Beweisen Sie den *Binomischen Lehrsatz*: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Hinweis. Benutzen Sie (a).

(c) Sei M eine Menge mit genau $n \in \mathbb{N}$ Elementen und sei $k \leq n$. Überlegen Sie sich, warum M genau $\binom{n}{k}$ viele verschiedene Teilmengen mit je k Elementen hat und berechnen sie die Anzahl aller Teilmengen von M, also

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Hinweis. Benutzen Sie (b).