5.1. Diverse Grenzwerte (schriftlich)

(a) Beweisen Sie das „Prinzip der zwei Polizisten“: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, a_n und b_n konvergieren beide gegen $x \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$. Dann ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Hinweis. Dies hilft bei (b), wenn man geeignete „Polizisten“ a_n und b_n findet.

(b) Bestimmen Sie die folgenden drei Grenzwerte $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n+2}, \qquad c = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2-42} - \frac{1}{n}}{\frac{7}{n^3+3n+1}}.$$

(c) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Was schliessen Sie daraus?

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2^{n-k}}\right), \qquad B = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{n-k}}\right).$$

5.2. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

5.3. Häufungspunkte Sei $\alpha \in [0, 2\pi[$ eine feste Zahl. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (e^{i\alpha})^n \in \mathbb{C}$ für

(a) $\frac{\alpha}{2\pi} \in [0, 1[\cap \mathbb{Q}$,

(b) $\frac{\alpha}{2\pi} \in [0, 1[\setminus \mathbb{Q}$. *Hinweis:* Satz von Bolzano Weierstrass.

Beweisen Sie die Behauptung und begründen Sie warum die Folge keine weiteren Häufungspunkte hat.

Bemerkung. Nach Definition ist $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der komplexen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls sie eine gegen z konvergente Teilfolge zulässt.

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer* Zahlen $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ konvergiert nach Definition gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

wobei hier $|z_n - z| = \sqrt{(z_n - z)\overline{(z_n - z)}}$ den Absolutbetrag *komplexer* Zahlen meint. Aus Satz 3.6.1 folgt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann nach obiger Definition konvergiert, wenn sowohl die reelle Folge der Realteile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die reelle Folge der Imaginärteile $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert und dabei gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

5.4. Reihen Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\frac{1}{n}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$,

(c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-k}$. Berechnen Sie zusätzlich den Wert dieser Reihe.

5.5. Konvergenzbereiche Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen, also die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ sodass die Reihe konvergiert.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}x^n}{(1-x)^{2n}}, \quad x \neq 1.$