7.1. Additionstheoreme △ Wir definieren die folgenden drei Potenzreihen.

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \operatorname{Cos}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{Sin}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(a) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x)$, sowie

$$\operatorname{Cos}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)}{2}, \qquad \operatorname{Sin}(x) = \frac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix)}{2i}.$$

(b) Benutzen Sie (a) und $\operatorname{Exp}(z+w) = \operatorname{Exp}(z)\operatorname{Exp}(w)$ um folgende Additionstheoreme zu beweisen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}(x+y) &= \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Sin}(y), \\ \operatorname{Sin}(x+y) &= \operatorname{Sin}(x)\operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(x)\operatorname{Sin}(y). \end{aligned}$$

(c) Beweisen Sie $\operatorname{Sin}(x)^2 + \operatorname{Cos}(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellen Sie $\operatorname{Cos}(3x)$ als Polynom in $\operatorname{Cos}(x)$ dar.

Bemerkung. Im Verlauf der Vorlesung werden die Potenzreihen $\operatorname{Cos}(x)$ und $\operatorname{Sin}(x)$ als die trigonometrischen Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ wiedererkannt.

7.2. Verhalten von Sin △ $\operatorname{Exp}(x)$ und $\operatorname{Sin}(x)$ seien für $x \in \mathbb{R}$ definiert wie in 7.1.

(a) Beweisen Sie: Für alle $x \in [0,1]$ gilt die Ungleichung $\operatorname{Sin}(x) \leq x$.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sin}(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Sin}(x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Sin}(x)}{x^2 \operatorname{Exp}(x) - x^2}.$$

7.3. stetige Funktionen ♡

(a) Zeigen Sie, dass $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ in allen $x_0 \in [0,\infty[$ stetig ist.

Hinweis. f wächst monoton und Lösungen $y \geq 0$ der Gleichung $y^2 = x_0$ sind eindeutig.

(b) Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0,2[, \\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2,4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

7.4. Linker und rechter Grenzwert (schriftlich) ♡ Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x-a| + |x^2 - a^2|} \end{aligned}$$

an der Stelle $x_0 = a$ stetig ergänzbar?

7.5. Stetigkeit ♡ Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$