9.1. Kompositionen ♡ *...stetiger Funktionen sind stetig.* (frei nach Satz 4.2.1)

(a) Überlegen Sie sich, warum folgende Funktionen stetig sind.

$$\begin{aligned} \iota_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & \iota_2 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & p_1 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & p_2 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}. \\ s &\mapsto (s, 0) & s &\mapsto (0, s) & (x, y) &\mapsto x & (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Wir nennen ι_1, ι_2 „Einbettungen“ und p_1, p_2 „Projektionen“. In der Vorlesung wurde ausserdem gezeigt, dass die Multiplikation $m(x, y) = xy$ eine stetige Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (Beispiel 4.1.5).

(b) Schreiben Sie folgende Funktionen f, g explizit als Summe und Komposition von $\iota_1, \iota_2, p_1, p_2, m$ und weisen Sie somit Stetikeit von f, g nach. Was ist das Bild von f?

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & g &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}. \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y) & (x, y) &\mapsto (x - y)^2 \end{aligned}$$

9.2. Punktmengentopologie (schriftlich) ◇ Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Existiert eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die nicht offen, nicht abgeschlossen und nicht beschränkt ist?

(b) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Teilmenge. Bestimmen Sie das *Innere*, den *Abschluss* und den *Rand* von A und beweisen Sie Ihre Behauptung. Ist A kompakt?

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie: $K \cap A$ ist kompakt, $\Omega \setminus A$ ist offen und $A \setminus \Omega$ ist abgeschlossen.

(d) Seien $r, R \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Kreisring $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\ r < \|x\| < R\}$ offen ist.

9.3. Topologisches Kriterium ♡ Die Funktion $f\colon\ ]0, 4[\ \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-2)^2 - 1, & \text{falls } 0 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{falls } 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

(a) Fertigen Sie eine grosszügige Zeichnung des Graphen von f an.

(b) Zeigen Sie, dass f das topologische Kriterium für Stetigkeit an $x_0 = 2$ nicht erfüllt. Finden Sie dazu eine Umgebung V von $f(2)$ in $\mathbb{R}$, sodass $U = f^{-1}(V)$ keine Umgebung von 2 in $\Omega =]0, 4[$ ist und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Zeichnen Sie die Mengen U und V aus (b) in Ihre Zeichnung aus (a) ein.

9.4. Fixpunkt △ Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine beliebige stetige Funktion.

(a) Beweisen Sie, dass f einen „Fixpunkt“ hat, also ein $a \in [0,1]$ mit $f(a) = a$.

Hinweis. Fixpunkte von f sind Nullstellen der Funktion $g(x) = x - f(x)$. Wenden Sie den Zwischenwertsatz an, nachdem Sie dessen Voraussetzungen nachgewiesen haben.

(b) Es ist wichtig, dass $[0,1]$ kompakt ist: Finden Sie Beispiele für stetige Funktionen

$$g\colon\ ]0,1[\ \to\ ]0,1[\,, \qquad\qquad h\colon\ [0,\infty[\ \to\ [0,\infty[\,,$$

die *keinen* Fixpunkt haben.

(c) Angenommen, $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig mit $f(0) = 0 = f(1)$. Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in [0,1] : f(x) = f(x + \tfrac{1}{n}).$$

(Es existieren also Paare von Punkten mit gleichem Funktionswert und beliebig kleinem Abstand.)