10.1. Zwischenwerte ♡ Zeigen Sie, dass folgende Abbildung bijektiv ist.

$$f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hinweis. Beweisen Sie Stetigkeit und Monotonie von f und folgern Sie Bijektivität aus dem Zwischenwertsatz.

10.2. Funktionenfolgen (schriftlich) ◇ Konvergieren folgende Funktionenfolgen für $n \to \infty$ punktweise gegen eine Grenzfunktion? Falls ja, bestimmen Sie diese und untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^2$

(b) $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = x + x^n(1-x)^n$

(c) $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \sqrt[n]{x}$

(d) $\Lambda_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \Lambda_n(x) = \begin{cases} 2nx, & \text{falls} \quad 0 \le x < \frac{1}{2n}, \\ 2-2nx, & \text{falls} \quad \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$

Zeichnen Sie die Graphen von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$.

10.3. Ungleichmässigkeit △ Zeigen Sie, dass die nachstehenden Folgen von Funktionen für $n \to \infty$ punktweise aber nicht gleichmässig konvergieren und bestimmen sie den punktweisen Grenzwert.

(a) $f_n\colon\ [0,\infty[\ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x^n-1}{x^n+1}$

(b) $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = x^2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^k$

10.4. Erste Ableitungen △ Bestimmen Sie zu folgenden Funktionsvorschriften jeweils den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und die erste Ableitung.

$$f(x) = 6x^7 + \frac{14}{x^3}, \qquad g(x) = \frac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)(x+2)}, \qquad h(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Zeichnen Sie den Graphen Γ von h, berechnen Sie die Gleichung der Tangente an Γ im Punkt $(x_0, h(x_0)) \in \Gamma$ und zeichnen Sie diese für $x_0 = -2$ in Ihre Zeichnung ein.