11.1. Kettenregel △ Gegeben ist jeweils die Funktionsvorschrift von $f\colon D_0 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D_0 \subset \mathbb{R}$. Geben Sie die Menge $D_1 \subset D_0$ an, auf der f differenzierbar ist, finden Sie die Funktionsvorschrift der Ableitung $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

(a) $f(x) = \log\Big(\frac{1}{x}(1+\sqrt{1-x^2})\Big)$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\log(\tan x)}$

(c) $f(x) = (x^x)^x$

(d) $f(x) = x^{(x^x)}$

11.2. Zum Mittelwertsatz (schriftlich) △

(a) Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0,\pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in]0,\pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1-x$ für alle $x \in [0,\pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass f monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie eine solche Behauptung.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(b) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für $x > 0$,

(c) $e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x)$ für $x < y$,

(d) $1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$ für $x > 0$.

Hinweis. Unterscheidung Sie bei (d) die drei Fälle $0 < x < 1$, $x = 1$ und $x > 1$.

11.3. Zum Umkehrsatz ♡ Gegeben Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \infty\right[\\ x &\mapsto e^x + \arctan x. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar und bijektiv ist.

Zeigen Sie, dass f^{-1} differenzierbar ist und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

11.4. Mit l'Hôpital ◇ Bestimmen Sie folgende Grenzwerte. Weisen Sie vor jeder Anwendung des Satzes von Bernoulli–de l'Hôpital dessen Voraussetzungen nach.

(a) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{e^x \sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x) + \sin(3x)}{\cos(2x)}$

(d) $\lim\limits_{x \searrow 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x \searrow 0} \sqrt[x]{1+x}$

(f) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$