12.1. Potenzreihe ♡ Zeigen Sie, dass folgende Potenzreihe für $x = \frac{6}{7}$ konvergiert.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Können Sie den Wert $\varphi(\frac{6}{7})$ berechnen? *Hinweis.* Beispiel 5.4.3.

12.2. Nullstellen (schriftlich) △ Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig, so existiert zwischen je zwei Nullstellen $x_1 < x_2$ von f mindestens eine lokale Extremalstelle $\xi \in]x_1, x_2[$ im *offenen* Intervall. *Hinweis.* Satz 4.2.3.

(b) Ist f auf I differenzierbar und hat die Ableitung f' höchstens $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen, so hat die Funktion f höchstens $n+1$ Nullstellen. *Hinweis.* Teil (a).

(c) Die Gleichung $2^x = x^2$ besitzt genau drei reelle Lösungen. *Hinweis.* Teil (b).

12.3. Taylor-Annäherung ♡ Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor einen Näherungswert für $\sqrt[3]{65}$. Eine Angabe als Bruch genügt. *Hinweis:* $4^3 = 64$.

Bis zu welcher Ordnung muss das Taylor-Polynom aufgestellt werden, damit der Abschätzungsfehler höchstens $\frac{1}{1000}$ beträgt?

12.4. Taylor-Polynome ◇ Berechnen Sie jeweils das Taylor-Polynom 4. Grades um den Punkt x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte.

(a) $p(x) = -x^3$, $x_0 = 2$,

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$,

(c) $g(x) = \log(\cos x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$,

(d) $h(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$,

(e) $u(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$,

(f) $v(x) = \cos(e^{x^2} - 1)$, $x_0 = 0$.

Hinweis. Dürfen Sie sich für (f) bei (d) und (e) bedienen?

12.5. Taylor-Reihe △ Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist. Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$.

Hinweis. Überlegen Sie sich, aus welchen Termen der Differenzenquotient für $f^{(k)}(0)$ besteht. Der Wert lässt sich dann induktiv für alle $k \in \mathbb{N}$ berechnen.