

Musterlösung 1

1. Um die Gleichheit

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c,$$

zu beweisen, zeigen wir die Äquivalenz

$$x \in \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^n A_i^c.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^n A_i^c &\Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} : x \in A_{i_0}^c \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} : x \notin A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^n A_i \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

2. Für $n \geq 2$ und $x \geq 0$ ist nach dem Binomischen Lehrsatz

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{2} x^2,$$

da alle weggelassenen Summanden nichtnegativ sind. Ausserdem gilt

$$\binom{n}{2} \geq \frac{n^2}{4},$$

denn

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2},$$

da $n-1 \geq \frac{n}{2}$. Also folgt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2.$$

3. Mithilfe des Assoziativgesetzes kann man die Summe $\sum_{n=0}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ als

$$\sum_{n=0}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{18} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=19}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

schreiben. Daher erhält man sofort

$$\sum_{n=19}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{18} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Mithilfe der Formel für die geometrische Reihe bekommt man

$$\sum_{n=0}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{49+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{50}}{1 - \frac{2}{3}}$$

und

$$\sum_{n=0}^{18} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{18+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{19}}{1 - \frac{2}{3}}.$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned} \sum_{n=19}^{49} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{50} - 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{19}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{19} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{31}\right). \end{aligned}$$

4. Wenn wir die Implikation

$$\text{„Karte hat schraffierte Rückseite“} \Rightarrow \text{Karte ist ein Ass“} \quad (1)$$

überprüfen wollen, müssen wir zunächst alle Karten mit schraffierter Rückseite überprüfen. Also müssen wir sicher die zweite Karte von links umdrehen. Nun müssen wir natürlich noch prüfen, ob keine andere Karte auch eine schraffierte Rückseite hat. Denn die äquivalente Aussage von (1) ist

$$\text{„Karte ist kein Ass“} \Rightarrow \text{Karte hat nicht schraffierte Rückseite“}. \quad (2)$$

Da es keine Rolle spielt, welche Rückseiten die Karten Eins und Drei haben, müssen wir diese nicht umdrehen. Jedoch müssen wir verifizieren, dass die letzte Karte, welche kein Ass ist, nicht eine schraffierte Rückseite hat. Also drehen wir sie um. Da es für unsere Aussage keine Rolle spielt, welche Vorderseite die Karte mit der gepunkteten Rückseite hat, müssen wir sie nicht umdrehen. Also haben wir zwei der Karten umgedreht.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir bemerken, dass $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ist. Hieraus folgt

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}.$$

In der zweiten Summe setzen wir $k := k' - 1$ bzw. $k + 1 = k'$; dann geht k' von 2 bis $n + 1$, und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k},$$

wobei der Strich zum Schluss wieder weggelassen wurde. Daher schliessen wir

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$