Musterlösung 10

1. **a)** Für das charakteristische Polynom gilt

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5 \stackrel{!}{=} 0\,,$$

d.h.

$$\text{chp}(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + 6\lambda + 5) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 5) \cdot (\lambda + 1)$$

Also sind die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = -1.$$

Und wir erhalten als allgemeine Lösung (alle Nullstellen verschieden und reel)

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-5x}.$$

b) Für die Diffgleichung $y'' + y' = 0$ ist das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen gibt die Bedingung

$$y(1) = c_1 + c_2 \cdot e^{-1} \stackrel{!}{=} 2 \text{ und } y'(1) = -c_2 e^{-1} \stackrel{!}{=} 2$$

Also ist $c_2 = -2e$ und $c_1 = 2 + 2 \cdot e \cdot e^{-1} = 4$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = 4 - 2 \cdot e \cdot e^{-x} = 4 - 2 \cdot e^{1-x}.$$

c) Für die Differentialgleichung

$$y'' + 2qy' + (q + q^2)y = 0$$

ist die charakteristische Gleichung

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 2q\lambda + (q + q^2) = 0$$

also sind die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4(q + q^2)}}{2} = -q \pm \sqrt{-q}.$$

Wir treffen nun Fallunterscheidungen für q je nachdem ob die Nullstellen reell, positiv, negative,... sind.

$\underline{q > 0}$:
In diesem Fall sind die Nullstellen nicht reel, sondern es gilt

$$\lambda_{1,2} = -q \pm i\sqrt{q}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = e^{-q \cdot x} \cdot (c_1 \cos(\sqrt{q}x) + c_2 \sin(\sqrt{q}x)),$$

d.h. die Lösungen sind alle beschränkt für $q > 0$ für $x \to \infty$ (sie streben sogar gegen Null!).

$\underline{q = 0}$:
Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und damit ist die allg. Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x$$

und die Lösung ist nur beschränkt für $x \to \infty$ falls $c_2 = 0$, sonst ist die Lösung unbeschränkt.

$\underline{q < 0}$: Die Nullstellen sind reel und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Ausserdem gilt stets, dass $\lambda_1 = -q + \sqrt{-q} > 0$ ist und damit sind Lösungen mit $c_1 \neq 0$ sicher nicht beschränkt.
Insgesamt erhalten wir also, dass nur für den Fall $q > 0$ alle Lösungen beschränkt sind.

d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ist

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2,$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

Damit ist die allg. Lösung eine Linearkombination aus den Funtkionen

$$e^{ix}, \quad xe^{ix}, \quad e^{-ix}, \quad xe^{-ix}$$

Siehe nächstes Blatt!

oder äquivalent dazu (da y eine reelle Funktion sein soll und $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$) eine Linearkombination der Funktionen

$$\sin(x), \quad x\sin(x), \quad \cos(x), \quad x\cos(x),$$

d.h.

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_3 \cdot \cos(x) + c_4 \cdot x\cos(x)\ .$$

Wir müssen die Ableitungen der allgemeinen Lösung $y(x)$ berechnen und die Anfangsbedingungen verwenden um die Konstanten zu bestimmen.
Es gilt

$$y(0) = c_3 \stackrel{!}{=} 0,$$

d.h. wir haben nur noch

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_4 \cdot x\cos(x)$$

Es ist also

$$y'(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \cdot (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) + c_4(-x\sin(x) + \cos(x))$$

und

$$y'(0) = c_1 + c_4 \stackrel{!}{=} 0.$$

Für die zweite Ableitung bekommen wir also

$$y''(x) = -c_1 \sin(x) + c_2(-x\sin(x) + 2\cos(x)) + c_4(-2\sin(x) - x\cos(x))$$

und damit

$$y''(0) = 2c_2 \stackrel{!}{=} 0$$

also auch $c_2 = 0$.
Damit erhalten wir für die dritte Ableitung

$$y'''(x) = -c_1 \cos(x) + c_4(-3\cos(x) + x \cdot \sin(x))$$

und

$$y'''(0) = -c_1 - 3c_4 \stackrel{!}{=} 1.$$

Damit haben wir für die letzten zwei Konstanten c_1 und c_4 das Gleichungssystem

$$c_1 + c_4 = 0 \text{ und } -c_1 - 3c_4 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1/2 \text{ und } c_4 = -1/2.$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

Bitte wenden!

2. a) Das charakteristische Polynom sollte also die Nullstellen $-1, 1, \pi$ und $-\pi$ haben. Das liefert uns

$$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+\pi)(\lambda-\pi) = \lambda^4 - \lambda^2(\pi^2+1) + \pi^2.$$

Somit ist die gesuchte Gleichung

$$y^{(4)}(x) - y''(x)(\pi^2+1) + \pi^2 y(x) = 0.$$

b) Die Lösung e^{-10x} stammt von der Nullstelle -10 des charakteristischen Polynoms, und $e^{3x}\cos(3x)$ von den komplex konjugierten Nullstellen $3+3i$ und $3-3i$. Somit erhalten wir das charakteristische Polynom

$$(\lambda+10)(\lambda-3-3i)(\lambda-3+3i) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 42\lambda + 180.$$

Das liefert uns die Gleichung

$$y'''(x) + 4y''(x) - 42y'(x) + 180y(x) = 0.$$

3. a) Wir betrachten getrennt die Probleme

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{1}$$

und

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{2}$$

Zuerst lösen wir das homogene Problem

$$2y'' + 3y' + 10y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\mathrm{chp}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right).$$

Also ist die allgemeine homogene reelle Lösung $y_h(x)$ von (1) und (2)

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Es bleibt also eine partikuläre Lösung für (1) und (2) zu bestimmen. Für (1) machen wir den Ansatz

$$y_{p_1}(x) = C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x).$$

Siehe nächstes Blatt!

Einsetzen in (1) liefert

$$(2C_3 - 6C_4)\sin(2x) + (2C_4 + 6C_3)\cos(2x) = \sin(2x).$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2C_3 - 6C_4 &= 1 \\ 2C_4 + 6C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir finden

$$C_3 = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad C_4 = -\frac{3}{20}.$$

Also ist

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (1). Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung von (2). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_{p_2}(x) = C_5.$$

Durch Einsetzen berechnen wir $C_5 = \frac{1}{10}$, somit ist $y_{p_2}(x) = \frac{1}{10}$ eine Lösung von (2). Damit ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

b) Das homogene Problem ist

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Dieses hat die offensichtliche Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und es folgt mittels Polynomdivision

$$\text{chp}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1).$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x + C_3\cos(x) + C_4\sin(x).$$

Bitte wenden!

Es bleibt die partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 e^x,$$

denn $y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$ ist bereits eine homogene Lösung. Einsetzen liefert

$$4Ae^x = e^x.$$

Somit ist

$$y_p(x) = \frac{1}{4} x^2 e^x,$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung $y(x)$ ist somit

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4} x^2 e^x$$

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. **a)** For the characteristic polynomial it holds true

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5 \overset{!}{=} 0\,,$$

i.e.

$$\mathrm{chp}(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + 6\lambda + 5) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 5) \cdot (\lambda + 1)$$

The zeros are

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = -1.$$

We obtain the general solution (all zeros are different and real)

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-5x}.$$

b) For the equation $y'' + y' = 0$ the characteristic polynomial is

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

and hence the general solution is

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$$

We insert the initial condition and get

$$y(1) = c_1 + c_2 \cdot e^{-1} \overset{!}{=} 2 \text{ and } y'(1) = -c_2 e^{-1} \overset{!}{=} 2$$

Therefore, $c_2 = -2e$ and $c_1 = 2 + 2 \cdot e \cdot e^{-1} = 4$, i.e. the solution is

$$y(x) = 4 - 2 \cdot e \cdot e^{-x} = 4 - 2 \cdot e^{1-x}.$$

c) For the ODE

$$y'' + 2qy' + (q + q^2)y = 0$$

the characteristic equation is

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 2q\lambda + (q + q^2) = 0$$

and hence the roots are

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4(q + q^2)}}{2} = -q \pm \sqrt{-q}.$$

We classificate the roots according to the sign of q.

$\underline{q > 0:}$

In this case, the zeros are not real,

$$\lambda_{1,2} = -q \pm i\sqrt{q}$$

Bitte wenden!

and the general solution is

$$y(x) = e^{-q \cdot x} \cdot (c_1 \cos(\sqrt{q}x) + c_2 \sin(\sqrt{q}x)),$$

i.e. the solutions are all bounded for $q > 0$ when $x \to \infty$ (they tend to zero!).
$\underline{q = 0}$:
The zeros are $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ and hence the general solution is

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x$$

and it is bounded when $x \to \infty$ only when $c_2 = 0$, otherwise it is not bounded.
$\underline{q < 0}$: The zeros are real and the general solution is given by

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Furthermore, we have that $\lambda_1 = -q + \sqrt{-q} > 0$ and so the solution with $c_1 \neq 0$ are surely not bounded.
In conclusion, we have that only for $q > 0$ all the solutions are bounded.

d) The characteristic polynomial of the equation

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

is

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2,$$

whose roots are

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \text{and} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

Hence the general solution is given by a linear combination of the functions

$$e^{ix}, \quad xe^{ix}, \quad e^{-ix}, \quad xe^{-ix}$$

or equivalently by (since y must be a real function and $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$) a linear combination of the functions

$$\sin(x), \quad x\sin(x), \quad \cos(x), \quad x\cos(x),$$

i.e.

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_3 \cdot \cos(x) + c_4 \cdot x\cos(x)\ .$$

We must compute the derivatives of the general solution $y(x)$ and use the initial conditions in order to determine the constants.
We have

$$y(0) = c_3 \stackrel{!}{=} 0,$$

Siehe nächstes Blatt!

i.e. we now obtain

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 x \cdot \sin(x) + c_4 \cdot x\cos(x)$$

Hence

$$y'(x) = c_1\cos(x) + c_2 \cdot (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) + c_4(-x\sin(x) + \cos(x))$$

and

$$y'(0) = c_1 + c_4 \stackrel{!}{=} 0.$$

For the second derivative we get

$$y''(x) = -c_1\sin(x) + c_2(-x\sin(x) + 2\cos(x)) + c_4(-2\sin(x) - x\cos(x))$$

and hence

$$y''(0) = 2c_2 \stackrel{!}{=} 0$$

and $c_2 = 0$.
For the third derivative we obtain

$$y'''(x) = -c_1\cos(x) + c_4(-3\cos(x) + x \cdot \sin(x))$$

and

$$y'''(0) = -c_1 - 3c_4 \stackrel{!}{=} 1.$$

So we have for the last two constants c_1 and c_4 the system

$$c_1 + c_4 = 0 \text{ and } -c_1 - 3c_4 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1/2 \text{ and } c_4 = -1/2.$$

Then the solution is given by

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

2. **a)** The characteristic polynomail must have as zeros -1, 1, π und $-\pi$. This implies

$$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+\pi)(\lambda-\pi) = \lambda^4 - \lambda^2(\pi^2+1) + \pi^2.$$

Hence, the equation is given by

$$y^{(4)}(x) - y''(x)(\pi^2+1) + \pi^2 y(x) = 0.$$

b) The solution e^{-10x} originates from the root -10 of the characteristic polynomial, and $e^{3x}\cos(3x)$ from the complex conjugate roots $3+3i$ and $3-3i$. Thus, we obtain the characteristic polynomial

$$(\lambda+10)(\lambda-3-3i)(\lambda-3+3i) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 42\lambda + 180.$$

This gives us the equation

$$y'''(x) + 4y''(x) - 42y'(x) + 180y(x) = 0.$$

Bitte wenden!

3. a) We consider separately the problems

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{3}$$

and

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{4}$$

First we solve the homogenous problem

$$2y'' + 3y' + 10y = 0.$$

The characteristic polynomial is

$$\text{chp}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

and admits roots

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right).$$

Hence, the general real solution $y_h(x)$ of (3) and (4) is

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

It remains to find a particular solution for (3) und (4). For (3) we make the Ansatz

$$y_{p_1}(x) = C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x).$$

We plug in (1) and get

$$(2C_3 - 6C_4)\sin(2x) + (2C_4 + 6C_3)\cos(2x) = \sin(2x).$$

By comparing the coefficients, we get

$$\begin{aligned} 2C_3 - 6C_4 &= 1 \\ 2C_4 + 6C_3 &= 0 \end{aligned}$$

We find

$$C_3 = \frac{1}{20} \quad \text{and} \quad C_4 = -\frac{3}{20}.$$

Then

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

is a particular solution of (3). We determine now a particular solution of (4). We make the Ansatz

$$y_{p_2}(x) = C_5.$$

Siehe nächstes Blatt!

We obtain $C_5 = \frac{1}{10}$, and then $y_{p_2}(x) = \frac{1}{10}$ is a solution of (4). Then

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

is the general solution of

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

b) The homogeneous problem is

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

with characteristic polynomial

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

It has clearly the root $\lambda_1 = 1$ and by division it follows

$$\text{chp}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1).$$

Hence, the general real solution is

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

It remains to find a particular solution $y_p(x)$. We make the Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 e^x,$$

because $y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$ is already an homogeneous solution. We insert and get

$$4Ae^x = e^x.$$

Thus

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 e^x,$$

is a particular solution. The general solution $y(x)$ is then

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4}x^2 e^x$$