Musterlösung 11

1. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega^2$ der homogenen Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ hat Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$x_h(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

ist. Der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hängt von ν ab:

a) $\omega \neq \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)$. Das liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -\nu C\sin(\nu t) + \nu D\cos(\nu t), \\ \ddot{x}_p(t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t). \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\nu t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin(\nu t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t) + \omega^2(C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)) \\ &= C(\omega^2 - \nu^2)\cos(\nu t) + D(\omega^2 - \nu^2)\sin(\nu t), \end{aligned}$$

d.h. $C = 0$ und $D = (\omega^2 - \nu^2)^{-1}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\nu t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) + \frac{\nu}{\omega^2 - \nu^2}\cos(\nu t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = -\frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = -\frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\nu t)$$

Bitte wenden!

b) $\omega = \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$. Das liefert

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p(t) &= (C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) + t\,(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)),\\
\ddot{x}_p(t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t)).
\end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t))\\
&\quad + \omega^2 t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))\\
&= -2\omega C\sin(\omega t) + 2\omega D\cos(\omega t),
\end{aligned}$$

d.h. $C = -\frac{1}{2\omega}$ und $D = 0$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = \frac{1}{2\omega^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$$

c) Abbildung 1 zeigt die berechneten Auslenkungen $x(t)$ für den Fall $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ (durchgehende Linie) bzw. $\omega = \nu = 1$ (gestrichelte Linie). Man erkennt, dass die Amplitude für $\omega \neq \nu$ beschränkt bleibt, wohingegen sie für $\omega = \nu$ mit der Zeit immer grösser wird. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Resonanzkatastrophe. Aus mathematischer Sicht ist der Term $\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$ in der Lösung von Teilaufgabe **b)** für diesen Effekt verantwortlich.

Siehe nächstes Blatt!

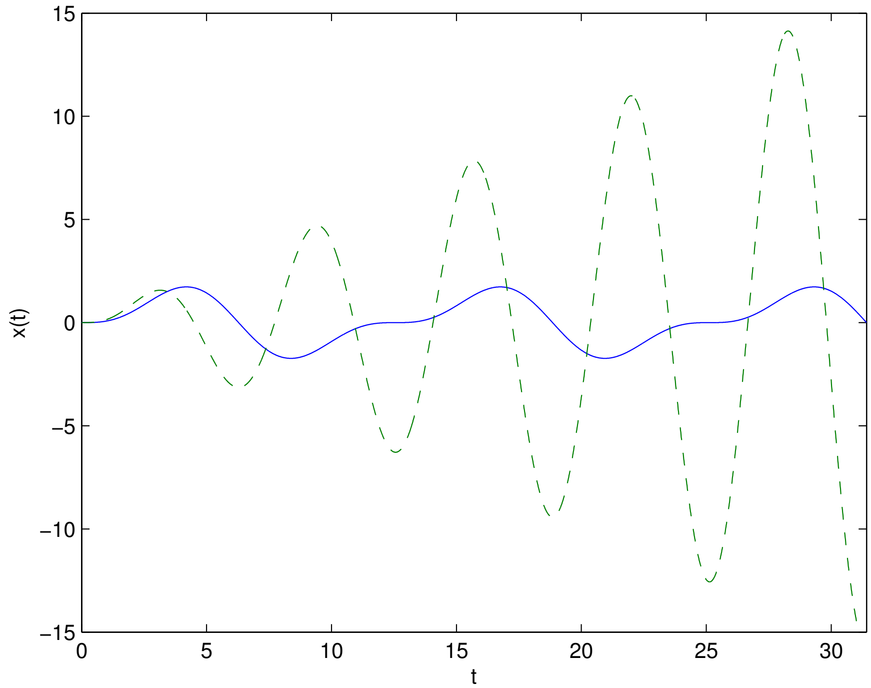

Abbildung 1: Auslenkungen $x(t)$ für $t \in [0, 10\pi]$

Bitte wenden!

2. **a)** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass $y(x)$ eine Lösung von dieser Differentialgleichung ist. Definieren wir

$$x(t) := e^t \quad \text{für} \quad t > 0,$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(x(t)) &= y'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t))e^t = y'(x(t))x(t), \\ \frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(y'(x(t))x(t)\right) = y''(x(t))x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y'(x(t))\frac{d}{dt}x(t) \\ &= y''(x(t))(x(t))^2 + y'(x(t))x(t). \end{aligned}$$

Da $y(x)$ ein Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) - 4\frac{d}{dt}y(x(t)) + 8y(x(t)) &= y''(x(t))(x(t))^2 - 3y'(x(t))x(t) + 8y(x(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also löst die Funktion $h(t) := y(x(t))$ folgende Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) - 4\dot{h}(t) + 8h(t) = 0,$$

wobei $\dot{h}(t) = \frac{d}{dt}h(t)$ und $\ddot{h}(t) = \frac{d^2}{dt^2}h(t)$. Diese Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8.$$

Die Nullstellen von $\text{chp}(\lambda)$ sind

$$\lambda_1 = 2 - 2i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2 + 2i.$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung gegeben durch

$$h(t) = e^{2t}\left(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\right).$$

Da $t = \ln(x)$ und $h(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ folgt $y(x) = h(\ln(x))$. Die allgemeine Lösung von (1) ist somit

$$y(x) = x^2\left(C_1\cos(2\ln(x)) + C_2\sin(2\ln(x))\right).$$

b) Wir dividieren die Gleichung $xy''(x) - 5y'(x) + \frac{8}{x}y(x) = x^2$ durch $x > 0$ und erhalten somit

$$y''(x) - \frac{5}{x}y'(x) + \frac{8}{x^2}(x) = x\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das Indexpolynom der homogenen Gleichung ist

$$\mathrm{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) - 5\alpha + 8\,,$$

dessen Nullstellen die Zahlen

$$\alpha_1 = 4 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 2$$

sind. Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2\,.$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch $y_p(t) = -x^3$. Deshalb ist die allgemeine Lösung unserer Gleichung die Funktion

$$y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2 - x^3\,.$$

Die Anfangsbedingungen $y(1) = 0$ und $y'(1) = 1$ liefern nun die Lösung

$$y(x) = x^4 - x^3$$

und wir sind fertig.

3. Sei n eine positive natürliche Zahl und seien

$$x_i := \frac{ia}{n}\,, \quad i = 0, ..., n\,.$$

Als Stützstellen für die Riemannsche Summe wählen wir $\xi_i := x_i$ für $i = 0, ..., n$. Mit diesen Teilpunkten (x_i) und Stützstellen (ξ_i) erhält man für die Funktion $x \mapsto f(x) = x^k$ die Riemannsche Summe

$$S_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ia}{n}\right)^k = \left(\frac{a}{n}\right)^{k+1} \sum_{i=1}^{n} i^k\,.$$

Mit dem Hinweis können wir

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + q_k n^k + \cdots + q_1 n$$

schreiben. Daraus folgt

$$\lim_n S_n = \lim_n \left\{ a^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{q_k}{n} + ... + \frac{q_1}{n^k} \right) \right\} = \frac{a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Also erhält man das Resultat

$$\int_0^a x^k\, dx = \lim_n S_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Bitte wenden!

English version

1. The characterstic polynomial $\lambda^2+\omega^2$ of the homogeneous ODE $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ has roots $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ Then, it follows that the general solution of the homogeneous problem is

$$x_h(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

. The Ansatz for the particular solution of the inhomogeneous ODE depends on ν:

a) $\omega \neq \nu$: We make the Ansatz $x_p(t) = C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)$. That gives

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= -\nu C\sin(\nu t) + \nu D\cos(\nu t),\\ \ddot{x}_p(t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t).\end{aligned}$$

We insert this in the ODE $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\nu t)$ to obtain

$$\begin{aligned}\sin(\nu t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t) + \omega^2(C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t))\\ &= C(\omega^2-\nu^2)\cos(\nu t) + D(\omega^2-\nu^2)\sin(\nu t),\end{aligned}$$

i.e. $C = 0$ and $D = (\omega^2-\nu^2)^{-1}$. The general solution of the inhomogeneous ODE is hence

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t).$$

Because of the initial conditions $x(0) = 0$, A must be zero. With the first derivative

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) + \frac{\nu}{\omega^2-\nu^2}\cos(\nu t)$$

and $\dot{x}(0) = 0$ it holds

$$B = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}.$$

Hence we have the solution:

$$x(t) = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2-\nu^2}\sin(\nu t)$$

b) $\omega = \nu$: We make the Ansatz $x_p(t) = t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$. This gives

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= (C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) + t\,(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)),\\ \ddot{x}_p(t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t)).\end{aligned}$$

We insert this in the ODE $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ to obtain

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t))\\ &\quad +\omega^2 t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))\\ &= -2\omega C\sin(\omega t) + 2\omega D\cos(\omega t),\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

i.e. $C = -\frac{1}{2\omega}$ and $D = 0$. The general solution of the inhomogeneous ODE is hence

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Because of the initial conditions $x(0) = 0$, A must be zero. With the first derivative

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

and $\dot{x}(0) = 0$ it holds

$$B = \frac{1}{2\omega^2}.$$

Hence we have the solution:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$$

c) Picture 2 shows the motion $x(t)$ for the case $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ (continuous line) respectively $\omega = \nu = 1$ (dotted line). One sees that the amplitude for $\omega \neq \nu$ remains bounded, while that one for $\omega = \nu$ becomes larger and larger as the time flows. In this context, one says there is a resonance catastrophe. On the mathematical point of view, the term $\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$ in the solution of point **b)** is responsible for this effect.

Bitte wenden!

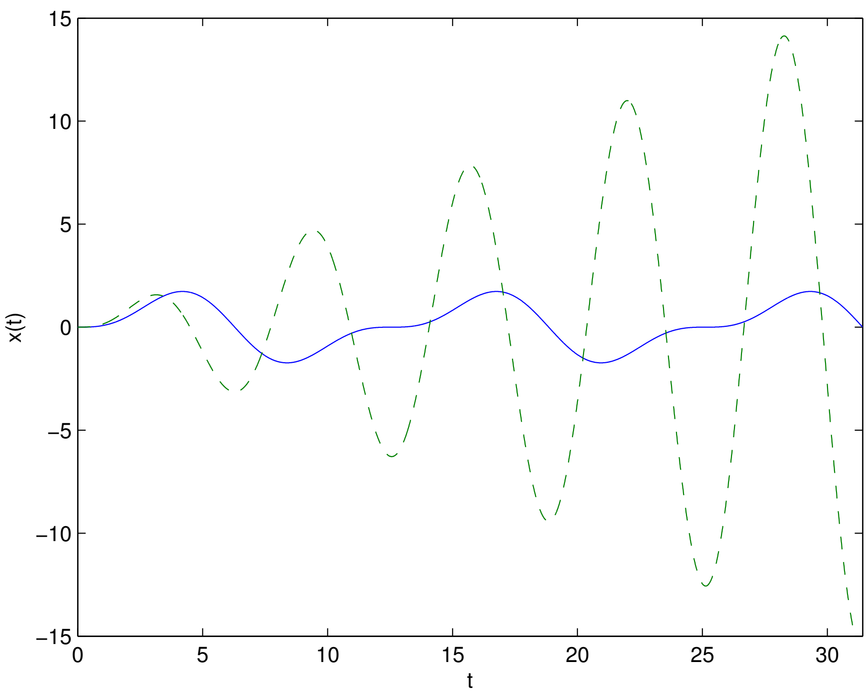

Abbildung 2: Auslenkungen $x(t)$ für $t \in [0, 10\pi]$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** We consider the ODE

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{for} \quad x > 0. \tag{2}$$

We assume that $y(x)$ is a solution of this ODE. We define

$$x(t) := e^t \quad \text{for} \quad t > 0,$$

it follows

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(x(t)) &= y'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t))e^t = y'(x(t))x(t), \\
\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(y'(x(t))x(t)\right) = y''(x(t))x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y'(x(t))\frac{d}{dt}x(t) \\
&= y''(x(t))(x(t))^2 + y'(x(t))x(t).
\end{aligned}$$

Since $y(x)$ is a solution of the equation, it follows

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) - 4\frac{d}{dt}y(x(t)) + 8y(x(t)) &= y''(x(t))(x(t))^2 - 3y'(x(t))x(t) + 8y(x(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hence, the function $h(t) := y(x(t))$ solves the following ODE

$$\ddot{h}(t) - 4\dot{h}(t) + 8h(t) = 0,$$

whereas $\dot{h}(t) = \frac{d}{dt}h(t)$ and $\ddot{h}(t) = \frac{d^2}{dt^2}h(t)$. This ODE has the characteristic polynomial

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8.$$

The zeros of $\text{chp}(\lambda)$ are

$$\lambda_1 = 2 - 2i \quad \text{and} \quad \lambda_2 = 2 + 2i.$$

Thus, the general real solution is given by

$$h(t) = e^{2t}\left(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\right).$$

Because $t = \ln(x)$ and $h(t) = y(x(t)) = y(e^t)$, it follows $y(x) = h(\ln(x))$. The general solution of (2) is

$$y(x) = x^2\left(C_1\cos(2\ln(x)) + C_2\sin(2\ln(x))\right).$$

b) We divide the equation $xy''(x) - 5y'(x) + \frac{8}{x}y(x) = x^2$ by $x > 0$ to obtain

$$y''(x) - \frac{5}{x}y'(x) + \frac{8}{x^2}(x) = x\,.$$

Bitte wenden!

The index-polynomial of the homogeneous equation is

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) - 5\alpha + 8$$

whose roots are the numbers

$$\alpha_1 = 4 \quad \text{and} \quad \alpha_2 = 2\,.$$

Thus, the general real solution of the homogeneous equation is given by

$$y_h(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2\,.$$

A particular solution is given by $y_p(t) = -x^3$. Hence, the general solution of our equation is the function

$$y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2 - x^3\,.$$

The initial conditions $y(1) = 0$ and $y'(1) = 1$ give now the solution

$$y(x) = x^4 - x^3$$

and we are done.

3. Let n be a positiv natural number and

$$x_i := \frac{ia}{n}\,, \quad i = 0, ..., n\,.$$

As grid points for the Riemann Sum we choose $\xi_i := x_i$ for $i = 0, ..., n$. With these points (x_i) and grid points (ξ_i) we obtain for the function $x \mapsto f(x) = x^k$ the Riemann sum

$$S_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ia}{n}\right)^k = \left(\frac{a}{n}\right)^{k+1} \sum_{i=1}^{n} i^k\,.$$

With the observation we can write

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + q_k n^k + \cdots + q_1 n\,.$$

Thus, it follows

$$\lim_n S_n = \lim_n \left\{ a^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{q_k}{n} + ... + \frac{q_1}{n^k} \right) \right\} = \frac{a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Hence, we obtain the result

$$\int_0^a x^k \, dx = \lim_n S_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}\,.$$