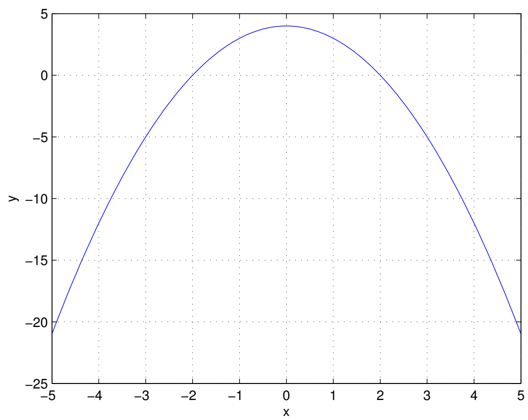
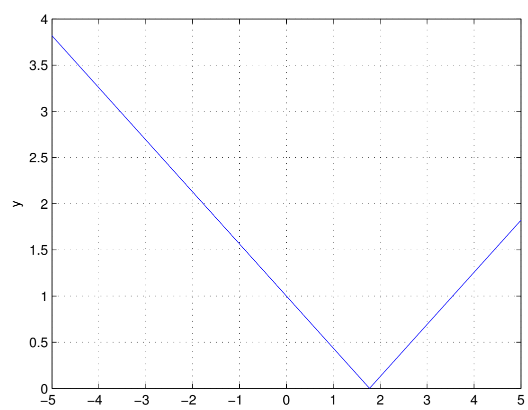
Musterlösung 2

1. **a)** Da $4 - x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, besteht der Definitionsbereich von f_1 aus allen reellen Zahlen. Der Wertebereich besteht aus allen reellen Zahlen y, welche kleiner oder gleich 4 sind. Um das zu sehen, lösen wir die Gleichung $y = 4 - x^2$ nach x auf. Wir erhalten also $x = \pm\sqrt{4 - y}$, was genau für $y \leq 4$ definiert ist.

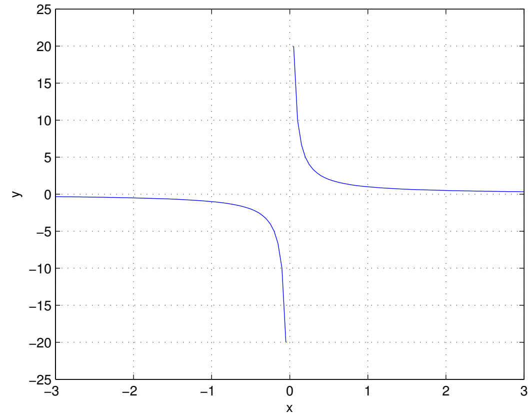


b) Der Definitionsbereich von f_2 ist $\mathbb{R}$. Der Wertebereich besteht aus allen nichtnegativen, reellen Zahlen.

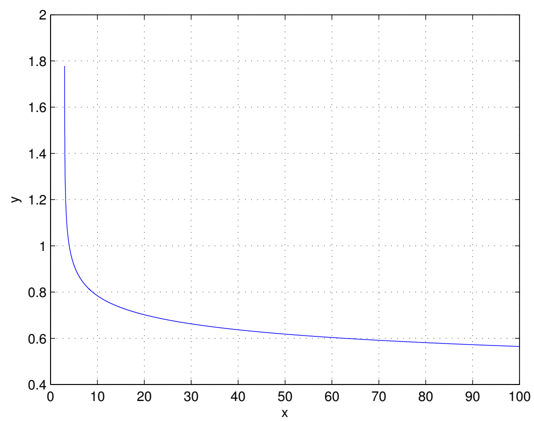


c) Sowohl der Definitionsbereich wie auch der Wertebereich von f_3 ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bitte wenden!

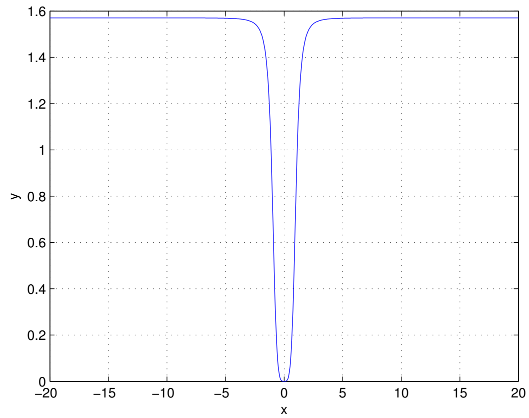


d) Da der Nenner nicht Null und der Ausdruck in der Klammer nicht negativ sein darf, ist der Wertebereich von f_4 das Intervall $(3, \infty)$. Für den Wertebereich müssen wir schauen, für welche $y \in \mathbb{R}$ die Funktion f_4 surjektiv ist. Das ist der Fall für $y \in (0, \infty)$.



e) Der Definitionsbereich von f_5 ist $\mathbb{R}$. Der Wertebereich besteht aus dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Siehe nächstes Blatt!



2. **a)** Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

b) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

c) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B^c) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B^c \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c\,. \end{aligned}$$

d) Im Allgemeinen gilt die Identität nicht! Um das zu sehen, brauchen wir ein Gegenbeispiel. Wir betrachten deshalb die Mengen

$$X = \{\heartsuit, \bigstar, \clubsuit\} = Y$$

und die Abbildung $f : X \to Y$ definiert durch

$$f(\heartsuit) = \heartsuit\,,$$

Bitte wenden!

$$f(\bigstar) = \heartsuit\,,$$
$$f(\clubsuit) = \bigstar\,.$$

Sei nun $A = \{\clubsuit\}$. Dann gilt $f(A)^c = \{\heartsuit, \clubsuit\}$, aber $f(A^c)$ ist

$$f(A^c) = f(\{\heartsuit, \bigstar\}) = \{\heartsuit\}\,,$$

d.h. $f(A^c) \neq f(A)^c$ und wir sind fertig.

3. **a)** Wir müssen zeigen, dass falls x_1, $x_2 \in X$ existieren mit $(g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, dass dann gilt $x_1 = x_2$. Beachte, dass aus der Injektivität von g folgt, dass $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Und aus der Injektivität von f folgt dann $x_1 = x_2$. Damit ist $g \circ f$ injektiv.

b) Wir müssen zeigen, dass für jedes $z \in Z$ ein $x \in X$ existiert, so dass $g(f(x)) = z$ ist. Wir nehmen ein beliebiges $z \in Z$. Aus der Surjektivität von g folgt, dass ein $y \in Y$ existiert mit $g(y) = z$. Aus der Surjektivität von f folgt, dass es ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$ ist. Also ist unser Kandidat dieses $x \in X$. Es folgt $z = g(y) = g(f(x))$. Somit ist $g \circ f$ surjektiv.

c) Seien x_1, $x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Es folgt, dass $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Aus der Injektivität von $g \circ f$ folgt also $x_1 = x_2$.

d) Sei $z \in Z$ beliebig. Wegen der Surjektivität von $g \circ f$ existiert ein $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$. Nenne nun $f(x) =: y \in Y$. Damit gilt $g(y) = z$. Somit ist g surjektiv.