Musterlösung 3

1. Um die Stetigkeit von h zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $x_0 = 0$: sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \varepsilon^2$ und betrachten alle $x \geq 0$ mit $|x| < \delta$. Dann folgt
$$|h(x) - h(0)| = \sqrt{x} = \sqrt{|x|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon\,,$$
d.h. h ist stetig im Punkt 0.
2. $x_0 > 0$: sei $\varepsilon > 0$. Wir erinnern an die folgende Identität
$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\,,$$
die für alle nicht negativen x gilt. Wir setzen $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$. Somit erhalten wir für alle $x \geq 0$ mit $|x - x_0| < \delta$
$$|h(x) - h(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leq \varepsilon\,,$$
d.h. h ist stetig im Punkt x_0.

2. **a)** Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$. Weil $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, gilt
$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|\,, \quad \text{für alle } x \in D\,,$$
wobei $K \geq 0$ die Lipschitz-Konstante von f ist.

Falls $K = 0$ ist, dann ist f eine konstante Funktion, die offensichtlich stetig ist.

Falls $K > 0$ ist, setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
$$|f(x) - f(x_0)| < K\delta = \varepsilon\,,$$
d.h. f ist stetig im Punkt x_0.

b) Nein! Um das zu sehen, betrachten wir die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Aus Aufgabe **1.** wissen wir, dass diese Funktion stetig ist. Wir nehmen nun an, dass sie auch Lipschitz-stetig ist. Dann gilt
$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq K|x - x'|\,, \quad \text{für alle } x, x' \geq 0\,,$$

Bitte wenden!

wobei $K > 0$ ist. Wir wählen $x' = 0$. Dann gilt $\sqrt{x} \leq K|x| = Kx$. Wir wählen nun ein $x:\ 0 < x < \frac{1}{K^2}$. Somit folgt

$$1 \leq K\sqrt{x} < K \cdot \frac{1}{K} = 1\,,$$

d.h. $1 < 1$. Widerspruch! Wir schliessen, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig sein kann.

3. Da $\lim_{x\to 0^-} 3\sqrt{-x} + 1 = 1$ ist, muss der Wert von $cx + d$ an der Stelle $x = 0$ gleich 1 sein. Somit ist also $d = 1$. Weiters gilt $\lim_{x\to 1^+} x^{10} - 1 = 0$. Der Wert von $cx + d$ muss also in $x = 1$ gleich 0 sein. Also erhalten wir $c = -1$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist f jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

4. **a)** Per Definition ist $g(0) = 0$, also existiert es.

b) Da $x^2 - b = (x - b)(x + b)$ ist, gilt $g(x) = x + b$ für $x \neq b$. Also ist

$$\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b}(x + b) = 2b.$$

c) Damit $g(x)$ stetig ist an der Stelle $x = b$, muss gelten

$$\lim_{x\to b} g(x) = g(b),$$

also $2b = 0$. Damit sehen wir, dass $g(x)$ an der Stelle $x = b$ stetig ist, genau dann, wenn $b = 0$ ist.