Musterlösung 4

1. **a)** Wir sehen
$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2-\pi x+3}{x^2+\pi^2} = \frac{\pi^2-\pi^2+3}{\pi^2+\pi^2} = \frac{3}{2\pi^2}.$$

b) Wir faktorisieren und erhalten
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}.$$
Da wir uns von rechts an 1 annähern, ist $(x-1)>0$. Somit erhalten wir weiter
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+20}{1+\sqrt{x}} = \frac{21}{2}.$$

c) Analog wie in b) erhalten wir mit Faktorisieren
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}.$$
Da wir uns nun von links an 1 annähern, ist $(x-1)<0$. Somit erhalten wir
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+20}{-1+\sqrt{x}} = -\infty.$$

d) Da der Sinus und der Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, erhalten wir
$$\begin{aligned}
0 &= \sin\{\pi\cos(\sin(0))\} \\
&= \sin\left\{\pi\cos\left(\lim_{x\to 0}\sin(x)\right)\right\} \\
&= \sin\left\{\pi\lim_{x\to 0}\cos(\sin(x))\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\sin\{\pi\cos(\sin(x))\}\ .
\end{aligned}$$

e) Wegen $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}=\infty$, ist $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^8}} = \lim_{z\to\infty} e^{-z} = 0$.

Bitte wenden!

f) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x+e}-\sqrt{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+e+x}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}=0\,.\end{aligned}$$

g) Aus 2f) wissen wir, dass $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right)=0$. Da der Logarithmus auf ganz $(0,\infty)$ stetig ist, können wir den Grenzwert hineinziehen und erhalten

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(e^2+\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right)=\log(e^2)=2\,.$$

h) Es gilt $\lim_{x\to 100}(x-100)\sin\left(\frac{1}{x-100}\right)=\lim_{z\to 0}z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Da $\sin\left(\frac{1}{z}\right)\in[-1,1]$ für alle $z\neq 0$ und somit beschränkt ist, folgt unmittelbar, dass $\lim_{z\to 0}z\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0$.

2. a) Wir setzen zur Abkürzung $S(n):=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

`Induktionsanfang:` $n=1$.
Für $n=1$ gilt offensichtlich $S(1)=1=\frac{(4\cdot 1^2-1)\cdot 1}{3}$.

`Induktions-Schritt:` $n\to n+1$.

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n)+(2n+1)^2=\frac{1}{3}(4n^2-1)n+4n^2+4n+1\\ &= \frac{1}{3}(4n^3-n+12n^2+12n+3)\\ &= \frac{1}{3}(4(n+1)^3-(n+1))\\ &= \frac{(4(n+1)^2-1)(n+1)}{3}\,,\qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

b) Wir halten k fest und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach $n\geq k$.

`Induktionsanfang:` $n=k$.
Es gilt

$$\sum_{m=k}^{k}\binom{m}{k}=\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

`Induktions-Schritt:` $n \to n+1$.
Es gelte die Behauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, dann ist

$$\binom{n+2}{k+1} = \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k}$$

zu bestätigen. Nun gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+2}{k+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.