Musterlösung 5

1. **a)** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n!}{n^n}$ gilt für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{2} < 1\,,\end{aligned}$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung benutzt haben.

b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ konvergiert ebenfalls nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n^4}{3^n}$ gilt für alle $n \geq 4$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^4 < 1\,.$$

c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergiert. Denn für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}\,.$$

d) Auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ wenden wir das Leibnizsche Konvergenzkriterium an. Es ist

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n a_n$$

mit

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\,.$$

Wir haben zu zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n > 1\,,\end{aligned}$$

also ist $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend.

Bitte wenden!

2. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq M \,.$$

Wir setzen

$$c := a_0 + a_1 + \cdots + a_M \,,$$

dann gilt für alle $n > M$

$$|b_n| = \frac{1}{n+1}|c + a_{M+1} + \cdots + a_n| < \frac{1}{n+1}|c| + \frac{n-M}{n+1} \cdot \frac{\epsilon}{2} \,.$$

Sei jetzt $N > M$ so gewählt, dass

$$\frac{1}{N+1}|c| < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

Dann gilt

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N \,,$$

also konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen 0.

3. Da $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ existieren zu vorgegebenen $\epsilon > 0$ Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - c| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

$$|c_n - c| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2$$

Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ gilt dass

$$c - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < c + \epsilon \,,$$

d.h. $|c - b_n| < \epsilon$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \,.$$

English version

4. **a)** The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converges because of the quotient-criterion. Since with $a_n := \frac{n!}{n^n}$ holds for all $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{2} < 1\,, \end{aligned}$$

where we have used the Bernoulli inequality.

b) The series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ converges because of the quotient-criterion. Since with $a_n := \frac{n^4}{3^n}$ holds for all $n \geq 4$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^4 < 1\,.$$

c) The series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ diverges. Indeed, for all $n \geq 3$ holds

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}\,.$$

d) For the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ we will apply Leibniz's convergence criterion. We have

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n a_n$$

where

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\,.$$

We have to prove that $(a_n)_{n\geq 1}$ is a monotone decreasing sequence to zero. We have

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}\,,$$

hence $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Furthermore, there holds

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n > 1\,, \end{aligned}$$

hence $(a_n)_{n\geq 1}$ is monotone decreasing.

5. Let $\epsilon > 0$ be given. Then there exists an $M \in \mathbb{N}$, such that

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{for all } n \geq M\,.$$

We set

$$c := a_0 + a_1 + \cdots + a_M\,,$$

then there holds for all $n > M$

$$|b_n| = \frac{1}{n+1}|c + a_{M+1} + \cdots + a_n| < \frac{1}{n+1}|c| + \frac{n-M}{n+1} \cdot \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Choose $N > M$ such that

$$\frac{1}{N+1}|c| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Then we have

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{for all } n \geq N\,,$$

and therefore the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0.

6. Because $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, for a given $\epsilon > 0$ there exist $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, such that

$$|a_n - c| < \epsilon \quad \text{for all } n \geq N_1$$

$$|c_n - c| < \epsilon \quad \text{for all } n \geq N_2$$

For $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ there holds that

$$c - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < c + \epsilon\,,$$

viz. $|c - b_n| < \epsilon$. Hence, it follows

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$