Musterlösung 6

1. **a)** Wir setzen ein und erhalten

$$z^2 - vw = (6+4i)^2 - 5i(3-2i) = 36 + 48i - 16 - 15i - 10 = 10 + 33i.$$

b) Mit $z - v = 6 - i$ und $z + v = 6 + 9i$ bekommen wir

$$\frac{z-v}{z+v} = \frac{6-i}{6+9i} \cdot \frac{6-9i}{6-9i} = \frac{27-60i}{117} = \frac{3}{13} - i\frac{20}{39}.$$

c) Da $zw = (3-2i)(6+4i) = 18 + 12i - 12i + 8 = 26$ ist, erhalten wir

$$\Re(zw(z+v)) = \Re(26(6+9i)) = \Re(156 + 234i) = 156.$$

d) Da für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

bekommen wir

$$\overline{\left(\frac{vw}{z}\right)} = \frac{\overline{vw}}{\bar{z}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{z}} = \frac{10-15i}{6-4i} = \frac{30}{13} - i\frac{25}{26}.$$

2. **a)** Wir setzen $a_n := \frac{1}{(3n+1)^4}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3(n+1)+1}{3n+1}\right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n+4}{3n+1}\right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^4 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = 1$.

Bitte wenden!

b) Wir setzen $a_n := (\ln(7n))^n$. Da der Koeffizient eine Potenz ist, bietet sich die Verwendung des Wurzelkriteriums für die Berechnung des Konvergenzradiuses an. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(7n) = \infty$$

folgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = 0.$$

c) Wir setzen $a_n := \frac{1}{n\pi^n}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\pi^{n+1}}{n\pi^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\pi = \pi\,. \end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = \pi$.

d) Wir setzen $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n+1))!}{(2n)!((n+1)!)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!(n+1)^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4\,. \end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = 4$.

3. Sei $z = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Wir erhalten direkt

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2.$$

b) Es gilt

$$z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\Re(z).$$

c) Es ist

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir setzen

$$z := -1 + \sqrt{3}i$$

und erhalten sofort, dass $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ sind. Somit gilt $z = 2e^{i2\pi/3}$. Wir bezeichen die komplexen Wurzeln von z^7 mit w_k, $k = 0, \cdots, 6$. Somit erhalten wir

$$w_k = \sqrt[7]{2^7} e^{i\left(\frac{14\pi/3 + 2k\pi}{7}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \quad k = 0, \cdots, 6 .$$

`Bemerkung`: Berücksichtigen Sie, dass für komplexe Zahlen nicht dieselben Vereinfachungen bezüglich der exponenten gelten.

5. Sei $z = re^{i\vartheta} = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. Wir wollen die Gleichung

$$z^5 = -\bar{z}$$

lösen. Wir setzen $z = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} r^5(\cos(5\vartheta) + i\sin(5\vartheta)) &= -r(\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta)) \\ &= r(-\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) \\ &= r(\cos(\pi - \vartheta) + i\sin(\pi - \vartheta)) , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt bekannte trigonometrische Formeln benutzt haben. Somit bekommen wir das System

$$\begin{cases} r^5 = r , \\ 5\vartheta = (-\vartheta + \pi) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} , \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{cases} r = 0; 1 , \\ \vartheta = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Die Lösungen sind daher $z = 0$ und $z = \cos((2k+1)\pi/6) + i\sin((2k+1)\pi/6)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Bitte wenden!

English version

1. **a)** We insert and obtain

$$z^2 - vw = (6+4i)^2 - 5i(3-2i) = 36 + 48i - 16 - 15i - 10 = 10 + 33i.$$

b) With $z - v = 6 - i$ and $z + v = 6 + 9i$ one obtains

$$\frac{z-v}{z+v} = \frac{6-i}{6+9i} \cdot \frac{6-9i}{6-9i} = \frac{27-60i}{117} = \frac{3}{13} - i\frac{20}{39}.$$

c) Because $zw = (3-2i)(6+4i) = 18 + 12i - 12i + 8 = 26$, we have

$$\Re(zw(z+v)) = \Re(26(6+9i)) = \Re(156 + 234i) = 156.$$

d) Since for any two complex numbers z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ that holds

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

we infer

$$\overline{\left(\frac{vw}{z}\right)} = \frac{\overline{vw}}{\bar{z}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{10-15i}{6-4i} = \frac{30}{13} - i\frac{25}{26}.$$

2. **a)** We set $a_n := \frac{1}{(3n+1)^4}$ and compute

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3(n+1)+1}{3n+1}\right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n+4}{3n+1}\right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^4 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

The limit exists and in particular it gives the convergence radius. It follows $\varrho = 1$.

b) We set $a_n := (\ln(7n))^n$. Since the coefficient is a power, we can use the root-criterion to compute the convergence radius. Because

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(7n) = \infty$$

it follows

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) We set $a_n := \frac{1}{n\pi^n}$ and compute

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\pi^{n+1}}{n\pi^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\pi = \pi\,. \end{aligned}$$

The limit exists and in particular it gives the convergence radius. It follows $\varrho = \pi$.

d) We set $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ and compute

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n+1))!}{(2n)!((n+1)!)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!(n+1)^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4\,. \end{aligned}$$

The limit exists and in particular it gives the convergence radius. It follows $\varrho = 4$.

3. Let $z = a + ib$ be with $a, b \in \mathbb{R}$.

a) We obtain immediately

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2.$$

b) We have

$$z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\Re(z).$$

c) We have

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a-ib} = a + ib = z.$$

4. We set

$$z := -1 + \sqrt{3}i$$

and get that $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ and $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Thus, it is $z = 2e^{i2\pi/3}$. We call the complex roots of z^7 as $w_k,\ k = 0, \cdots, 6$. Hence, we obtain

$$w_k = \sqrt[7]{2^7}e^{i\left(\frac{14\pi/3+2k\pi}{7}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \quad k = 0, \cdots, 6\,.$$

`Remark`**:** Observe that for complex numbers in general one is not allowed to simplify the exponents.

Bitte wenden!

5. Let be $z = re^{i\vartheta} = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. We want to solve the equation

$$z^5 = -\bar{z}\,.$$

We insert $z = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ and get

$$\begin{aligned} r^5(\cos(5\vartheta) + i\sin(5\vartheta)) &= -r(\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta)) \\ &= r(-\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) \\ &= r(\cos(\pi - \vartheta) + i\sin(\pi - \vartheta))\,, \end{aligned}$$

where in the last step we have used well known trigonometric formulas. Thus, we obtain the system

$$\begin{cases} r^5 = r\,, \\ 5\vartheta = (-\vartheta + \pi) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

namely

$$\begin{cases} r = 0; 1\,, \\ \vartheta = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

The solutions are $z = 0$ and $z = \cos((2k+1)\pi/6) + i\sin((2k+1)\pi/6)$ with $k \in \mathbb{Z}$.