Musterlösung 7

1. Wir wollen die Gleichung

$$\sinh(x) = y$$

nach y auflösen. Dafür setzen wir die Identität

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ein und erhalten

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Nun multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $2e^x$ und erhalten

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x.$$

Wir substituieren nun $z := e^x$. Damit haben wir die Gleichung

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Da $z = e^x > 0$ ist, ist nur $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$ die Lösung, welche uns interessiert. Damit ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$ gegeben durch

$$k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

2. Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form

$$y = mx + b$$

gegeben, wobei $m = f'(e)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(e, f(e))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{9}{x}$$

und damit $m = f'(e) = \frac{9}{e}$. Aus $(e, f(e)) = (e, 9)$ folgt, dass b die Gleichung

$$9 = \frac{9}{e}e + b$$

erfüllt. Somit ist also $b = 0$. Also ist die Gleichung der Tangente

$$y = \frac{9}{e}x.$$

Bitte wenden!

3. Es ist klar, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0\,, \\ c_k x^{n+1-k}, & \text{falls } x > 0\,, \end{cases}$$

wobei

$$c_k = \prod_{m=n-k+2}^{n+1} m\,.$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ auch in Nullpunkt existiert und dass gilt

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \cdots, n\}\ .$$

Dann ist $f^{(k)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

`Induktionsanfang:` $k = 0$.

Trivial, denn $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

`Induktionsschritt:` $k \to k+1, (k < n)$.

Wir haben zu zeigen, dass der Differenzenquotient

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0}$$

für $x \to 0$ gegen Null konvergiert. Es ist

$$\left| \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \right| \leq \left| \frac{c_k x^{n-k+1}}{x} \right| = |c_k x^{n-k}|\,.$$

Da $n - k \geq 1$, strebt dies für $x \to 0$ gegen Null.

4. Wir setzen $y = \log_a x$. Dann gilt nach Definition

$$a^y = x\,.$$

Daher folgt

$$\begin{array}{rcl} \log a^y & = & \log x \\ & \Leftrightarrow & \\ y \log a & = & \log x \\ & \Leftrightarrow & \\ y & = & \dfrac{\log x}{\log a}\,. \end{array}$$

d.h. $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ und wir sind fertig.

Siehe nächstes Blatt!

5. Die Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Wir berechnen nun die Ableitung mit dem Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)-a(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(-4+h)-a(-4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{-h}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -h^{-\frac{2}{3}} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Weil der Limes nicht existiert, schliessen wir, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = -4$ nicht differenzierbar ist.

Bitte wenden!

English version

1. We want to solve the equation

$$\sinh(x) = y$$

with respect to y. Hence, we insert the identity

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

and obtain

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Now we multiply both sides by $2e^x$ and get

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x.$$

We now substitute $z := e^x$. Thus, we have now the equation

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

The solutions of this equation are

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Since $z = e^x > 0$, only $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$ is the solution which interests us. Hence, the inverse function of $\sinh(x)$ is given by

$$k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

2. The tangent is given by the equation

$$y = mx + b\,,$$

where $m = f'(e)$ and b is to be determined such that the tangent contains the point $(e, f(e))$. We have

$$f'(x) = \frac{9}{x}$$

and so $m = f'(e) = \frac{9}{e}$. From $(e, f(e)) = (e, 9)$ it follows that b satisfies the equation

$$9 = \frac{9}{e}e + b\,.$$

Hence, $b = 0$. The equation of the tangent is

$$y = \frac{9}{e}x.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. It is clear that f is on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrarily many times differentiable and that for all $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ we have

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0\,, \\ c_k x^{n+1-k}, & \text{if } x > 0\,, \end{cases}$$

where

$$c_k = \prod_{m=n-k+2}^{n+1} m\,.$$

We show by means of induction that for all $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ the k-th derivative of f exists in zero as well and that it holds

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{for all } k \in \{0, 1, \cdots, n\}\ .$$

Hence $f^{(k)}$ will be continuous on the whole $\mathbb{R}$.

`Induction beginning:` $k = 0$.

Trivial, since $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

`Induction step:` $k \to k+1, (k < n)$.

We have to show that the difference-quotient

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0}$$

for $x \to 0$ converges to zero. We have

$$\left| \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \right| \leq \left| \frac{c_k x^{n-k+1}}{x} \right| = |c_k x^{n-k}|\,.$$

Because $n - k \geq 1$, the quantity above converges to zero for $x \to 0$.

4. We set $y = \log_a x$. Hence, by definition we have

$$a^y = x\,.$$

Thus, it follows

$$\begin{aligned} \log a^y &= \log x \\ &\Leftrightarrow \\ y \log a &= \log x \\ &\Leftrightarrow \\ y &= \frac{\log x}{\log a}\,. \end{aligned}$$

namely $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ and we are done.

Bitte wenden!

5. The function $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is on the whole $\mathbb{R}$ continuous. We now compute the derivative with the difference quotient:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)-a(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(-4+h)-a(-4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{-h}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -h^{-\frac{2}{3}} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Because the limit does not exist, we infer that the function is not differentiable at the point $x_0 = -4$.