Musterlösung 9

1. Man kann die gesuchten Anfangsglieder der Taylorreihe durch wiederholtes Differenzieren der Funktion f berechnen. Wir wählen hier eine andere Möglichkeit. Die gegebene Funktion ist das Produkt zweier Funktionen mit bekannter Taylor-Entwicklung, $f(x) = g(x)h(x)$, wobei

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)$$

und

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

Die Taylor-Entwicklung von f ergibt sich als Cauchy-Produkt dieser beiden Potenzreihen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , \quad \text{mit } \; c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell ,$$

wobei

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$

und

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und

$$c_1 = a_0 b_1 = \frac{1}{2} ,$$

$$c_2 = a_1 b_1 = -\frac{1}{4} ,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} ,$$

$$c_4 = a_1 b_3 + a_3 b_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{48} ,$$

$$c_5 = a_0 b_5 + a_2 b_3 + a_4 b_1 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{7}{480} .$$

Der Anfang der Taylor-Reihe der Funktion f lautet also

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + \frac{7x^5}{480} + R_6(f,0)(x) .$$

Bitte wenden!

2. Wir erinnern uns an

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

und somit erhalten wir mit $t = x^2$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\,.$$

Analog bekommen wir aus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

die Formel

$$\sin^2(x) = x^2 + \left(\frac{x^3}{6}\right)^2 - 2\,\frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\,.$$

Daher gilt

$$[x^2 - \log(1+x^2)]\sin^2(x) = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right]\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^8 - \frac{1}{6}x^8 + o(x^8)\,.$$

Wir schliessen

$$p_8(f,0)(x) = \frac{1}{2}(x^6 - x^8)\,.$$

3. Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\sin x = p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) + R_{2n+1}(\sin x, 0)(x)\,,$$

wobei

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

mit $\xi \in (0,x)$ ist.

Für $x = 1$ gilt somit

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(1) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

mit $\xi \in (0,1)$. Wir schätzen das Restglied mit

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}$$

ab. Weil wir einen Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ wollen, setzen wir die Bedingung

$$\frac{1}{(2n+2)!} < (100!)^{-1}$$

durch. Das ist äquivalent zu $2n+1 > 99$. Deshalb wird die Lösung der Aufgabe durch $2n+1 = 101$ gegeben.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. One can compute the beginning of the Taylor series via repeated differentiation of the function f. Here we choose a different approach. The given function can be seen as the product of two functions whose Taylor expansions are well-known, namely $f(x) = g(x)h(x)$, whereas

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)$$

and

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

The Taylor expansion of f results as Cauchy product of these two power series,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad \text{with } \ c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\,,$$

whereas

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$

and

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \text{ even,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{if } \ell \text{ odd.} \end{cases}$$

Thus, we obtain $c_0 = 0$ and

$$\begin{aligned} c_1 &= a_0 b_1 = \frac{1}{2}\,, \\ c_2 &= a_1 b_1 = -\frac{1}{4}\,, \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}\,, \\ c_4 &= a_1 b_3 + a_3 b_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{48}\,, \\ c_5 &= a_0 b_5 + a_2 b_3 + a_4 b_1 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{7}{480}\,. \end{aligned}$$

The beginning of the Taylor series of the function f is therefore

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + \frac{7x^5}{480} + R_6(f,0)(x)\,.$$

Bitte wenden!

2. We recall

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

and so we get with $t = x^2$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\,.$$

Similarly, we obtain from

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

the formula

$$\sin^2(x) = x^2 + \left(\frac{x^3}{6}\right)^2 - 2\,\frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\,.$$

Therefore, it holds

$$[x^2 - \log(1+x^2)]\sin^2(x) = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right]\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^8 - \frac{1}{6}x^8 + o(x^8)\,.$$

We conclude

$$p_8(f,0)(x) = \frac{1}{2}(x^6 - x^8)\,.$$

3. From the lecture it is known

$$\sin x = p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) + R_{2n+1}(\sin x, 0)(x)\,,$$

whereas

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

with $\xi \in (0, x)$.

For $x = 1$ holds

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(1) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

with $\xi \in (0, 1)$. We estimate the error term with

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}\,.$$

Since we require an error smaller than $(100!)^{-1}$, we impose the condition

$$\frac{1}{(2n+2)!} < (100!)^{-1}\,.$$

This is equivalent to $2n+1 > 99$. The solution of the exercise is therefore given by $2n+1 = 101$.