Musterlösung Schnellübung 1

1. Wir brauchen nur zu schauen, für welche $x \in \mathbb{R}$ der Nenner $x^2 + x - \pi$ Null wird. Für diese x ist die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-2|^3 - 2}{x^2 + x - \pi}\right)$$

nicht definiert. Wir lösen also

$$x^2 + x - \pi = 0$$

und erhalten

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi}}{2}.$$

Also ist f definiert auf dem Gebiet $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

2. **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = n + 1 = 2k + 1\,.$$

Falls andererseits n ungerade ist, d.h. $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = -n - 1 = -2k\,.$$

Wir schliessen

$$K_1 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-2k : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

b) Mit Aufgabe **a)** kann man K_2 umschreiben:

$$K_2 = \{\cos((2k+1)\pi) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos((-2k)\pi) : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Daher erhält man sofort

$$K_2 = \{-1\} \cup \{1\} = \{-1, 1\}$$

und ist fertig.

Bitte wenden!

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{-2}{n\pi} = \frac{-1}{k\pi}\,.$$

Falls n ungerade und in der Form $n = 4k+1$ mit $k \geq 0$ ist, dann bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(4k+1)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+1)\pi)}{4k+1} = \\ &= \frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Falls schliesslich n ungerade und in der Form $n = 4k+3$ mit $k \geq 0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}{(4k+3)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos((4k+3)\pi)}{4k+3} = \\ &= \frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$G := \left\{\frac{-1}{k\pi} : k \geq 1\right\}\,,$$

$$V_1 := \left\{\frac{2}{(4k+1)\pi}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}\,,$$

und

$$V_2 := \left\{\frac{2}{(4k+3)\pi}\left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1\right) : k \geq 0\right\}\,,$$

und schliessen

$$K_3 = G \cup V_1 \cup V_2\,.$$

3. Für die **Injektivität** zeigen wir

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\,,$$

Wir nehmen $\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$ an. Das ist äquivalent zu

$$x + x|y| = y + y|x|\,.$$

Fall 1**:** $x, y \geq 0$**.** Wir erhalten direkt $x + xy = y + yx$ und somit $x = y$.

Fall 2**:** $x, y < 0$**.** Analog wie oben erhalten wir mit $|x| = -x$ für $x < 0$ und $|y| = -y$ für $y < 0$, $x - xy = y - yx$. Wir schliessen $x = y$.

Siehe nächstes Blatt!

Fall 3**:** $x > 0$**,** $y \leq 0$**.** Dieser Fall kann nicht passieren. Wären $x > 0$ und $y \leq 0$, dann gelte $0 < x = y + 2xy \leq 0$

Fall 4**:** $y > 0$**,** $x \leq 0$**.** Sehen Sie Fall 3 an.

Somit haben wir die Injektivität gezeigt.

Für die **Surjektivität** zeigen wir, dass für alle $y \in (-1, 1)$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} = y$$

ist. Dafür unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

- Sei $0 \leq y < 1$. Da $x = y(1 + |x|)$ gelten muss, folgt $x \geq 0$ und somit $x = |x|$. Die Gleichung wird somit $x = y + yx$, d.h. $x = \frac{y}{1-y}$.
- Sei $-1 < y < 0$. Da $x = y(1+|x|)$ gelten muss, folgt $x < 0$ und somit $-x = |x|$. Die Gleichung wird somit $x = y - yx$, d.h. $x = \frac{y}{1+y}$.

Somit erhalten wir

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y}, & \text{falls } y \in [0, 1); \\ \frac{y}{1+y}, & \text{falls } y \in (-1, 0). \end{cases}$$

4. Wir setzen $k := \frac{j+1}{2}$ bzw. $j = 2k - 1$. Dann geht k von 1 bis 10^6. Wir erhalten darum

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2 \cdot 10^6 - 1} j = \sum_{k=1}^{10^6} (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^{10^6} k - 10^6 \,.$$

Mit der Gauss Formel bekommen wir

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2 \cdot 10^6 - 1} j = 2 \cdot \frac{10^6(10^6 + 1)}{2} - 10^6 = 10^6(10^6 + 1 - 1) = 10^{12}$$

und sind fertig.