Musterlösung Schnellübung 2

1. Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

2. **a)** Wir bezeichnen die linke bzw. rechte Seite der zu beweisenden Gleichung mit

$$LS(N) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$RS(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Der *Induktionsanfang* $N = 0$ ist klar, da $LS(0) = 0$ und $RS(0) = 0$.

Induktionsschritt $N \to N + 1$. Wir berechnen jeweils die Differenzen

$$LS(N+1) - LS(N) = \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}$$

und

$$\begin{aligned} RS(N+1) - RS(N) &= \frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{N+1} \\ &= \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}. \end{aligned}$$

Da diese Differenzen gleich sind, und nach Induktions-Voraussetzung $LS(N) = RS(N)$, folgt $LS(N+1) = RS(N+1)$.

b) *Induktionsanfang:* Für $n = 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{7}{9}$$

was dasselbe ist wie

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2^2 + 2 + 1}{2(2+1)}.$$

Bitte wenden!

Induktionsschritt: Wir wollen zeigen, dass

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)^2+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$$

gilt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} \\ &= \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder im zweiten Schritt die Induktionsverankerung verwendet haben. Wir schreiben nun

$$(n+1)^3 - 1 = n(n^2+3n+3) \ \text{ und } \ (n+1)^3+1 = (n^2+n+1)(n+2)\,.$$

Durch einsetzen und kürzen erhalten wir dann direkt

$$\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2},$$

was zu beweisen war.

3. Nach Definition wissen wir

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ heisst, dass für alle $M > 0$ existiert ein $R > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -M$$

und

- $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ heisst, dass für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R' > 0$ mit

$$x > R' \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon.$$

Wir müssen nun zeigen, dass $\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = -\infty$, d.h. dass für alle $N > 0$ ein $R'' > 0$ existiert mit $(x > R'' \Rightarrow f(x) + g(x) < -N)$. Wir wählen dafür $M = N + 1 + |c|$ und $\varepsilon = 1$, und finden dafür R, $R' > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -N - 1 - |c|\,, \quad x > R' \Rightarrow |g(x) - c| < 1\,.$$

Wir setzen nun

$$R'' := \max\{R, R'\} > 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann gilt für $x > R''$, dass

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(x) + g(x) - c + c \\ &< f(x) + 1 + c \\ &< -N - 1 - |c| + 1 + c \leq -N\,, \end{aligned}$$

und wir sind fertig.

4. Weil der Wert von $\sqrt{\pi} + \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\alpha}$ an der Stelle $x = 0$ gleich $\sqrt{\pi}$ ist, muss der Limes $\lim_{x\to 0^-} u(x) = e^k$ gleich $\sqrt{\pi}$ sein. Man erhält daher $k = \log(\sqrt{\pi})$. Ferner gilt $\lim_{x\to 1^-} u(x) = \sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha}$ und $u(1) = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$. Deshalb muss man auch die Bedingung $\sqrt{\pi} + \frac{1}{\alpha} = \frac{3e}{t} + \sqrt{\pi}$ stellen. Das bringt

$$\frac{t}{\alpha} = 3e\,, \quad \alpha, t \neq 0\,.$$

Auf $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ ist u jeweils eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Wir schliessen, dass u auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $k = \log(\sqrt{\pi})$ und $\alpha, t \neq 0$ mit $\frac{t}{\alpha} = 3e$ gilt.