Musterlösung Schnellübung 3

1. Wir multiplizieren den Ausdruck mit $1 = \frac{1-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2+i)(5-\frac{i}{2})(1-\frac{i}{2})}{1+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(10-i+5i+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{21}{2}+4i\right) \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{21}{2}+4i-\frac{21}{4}i+2\right) \\ &= 10-i \end{aligned}$$

.

Wir schliessen, dass $\Re(z) = 10$ und $\Im(z) = -1$ sind.

2. **a)** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(-z)^2 - 1 = z^2 - 1,$$

also ist f_1 nicht injektiv.

b) Wir haben

$$\mathrm{Re}(z+\alpha i) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Somit ist f_2 nicht injektiv.

3. **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass die Funktionen $x \mapsto nx$ und $x \mapsto 1 + |nx|$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Also ist auch die Funktion

$$x \mapsto K_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}$$

stetig, da der Nenner nirgends verschwindet. Für $n \geq 1$ erhält man

$$K_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+|x|}\,.$$

Bitte wenden!

Also gilt für $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0\,, \\ -1, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n(0) = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} K_n(0) = 0\,.$$

Es ist $K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)$, also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. In jedem Punkt $a \neq 0$ ist K stetig, da

$$\lim_{x\to a} K(x) = K(a)\,.$$

Im Nullpunkt ist K aber nicht stetig, da zum Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} K(x) = 1 \neq K(0) = 0\,.$$

Wir haben also hier eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

b) Sei $x \neq 0$. Von oben wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} \neq 0$ ist, und daher ist die benötigte Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt.

Sei nun $x = 0$. Noch einmal wissen wir von oben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $K_n(0) = 0$ gilt. Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(0) = 0$.

Wir schliessen, dass der Konvergenzbereich nur der Punkt 0 ist.

4. Es ist wichtig zu bemerken, dass die gegebene Gleichung keine algebraische Gleichung ist, weil es die Glieder $|z|$ und $|z|^2$ gibt. Deshalb darf man den Fundamentalsatz der Algebra nicht anwenden!

Um die Gleichung zu lösen, setzen wir daher $z = a + ib$. Die Gleichung wird somit

$$a^2 + b^2 - (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 0\,.$$

Wir trennen den Realteil und den Imaginärteil und erhalten das System

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ -b\sqrt{a^2 + b^2} + b = 0\,, \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ b(1 - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0\,. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus der zweiten Gleichung bekommen wir zwei Systeme

$$\left\{\begin{array}{l} b = 0\,, \\ a^2 - a|a| + a = 0\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} b \neq 0\,, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1\,, \\ 1 = 0\,. \end{array}\right.$$

Das zweite System besitzt keine Lösung. Das erste System besitzt die Lösungen $b = 0, a = 0$ und $b = 0, a = -1/2$. Die gesuchten Lösungen sind somit $z = 0$ und $z = -1/2$.

Bitte wenden!

English version

1. We multiply the expression with $1 = \frac{1-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}$ to obtain

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{(2+i)(5-\frac{i}{2})(1-\frac{i}{2})}{1+\frac{1}{4}} \\
&= \frac{4}{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(10-i+5i+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{21}{2}+4i\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{21}{2}+4i-\frac{21}{4}i+2\right) \\
&= 10-i
\end{aligned}
$$

.

We conclude that $\Re(z) = 10$ and $\Im(z) = -1$.

2. **a)** For any $z \in \mathbb{C}$ we have

$$(-z)^2 - 1 = z^2 - 1,$$

and hence f_1 is not injective.

b) We have

$$\mathrm{Re}(z + \alpha i) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{for all } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Thus, f_2 is not injective.

3. **a)** Let be $n \in \mathbb{N}$. We know that the functions $x \mapsto nx$ and $x \mapsto 1 + |nx|$ are continuous on $\mathbb{R}$. Thus, also the function

$$x \mapsto K_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}$$

is continuous, for the denominator never vanishes. For $n \geq 1$ we get

$$K_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+|x|}\,.$$

Thus, there holds for $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0\,, \\ -1, & \text{if } x < 0\,. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

For all $n \in \mathbb{N}$ is $K_n(0) = 0$, hence

$$\lim_{n\to\infty} K_n(0) = 0\,.$$

Thus, $K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)$ is defined for all $x \in \mathbb{R}$. At every point $a \neq 0$ K is continuous, since

$$\lim_{x\to a} K(x) = K(a)\,.$$

But in zero K is not continuous, since for instance

$$\lim_{x\to 0^+} K(x) = 1 \neq K(0) = 0\,.$$

We have here an example of a sequence of continuous functions, which converge to a discontinuous function.

b) Let be $x \neq 0$. From above we know that $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} \neq 0$, and hence the necessary condition for convergence is not satisifed.

Let now be $x = 0$. Again, we know from above that for all $n \in \mathbb{N}$ $K_n(0) = 0$. It follows $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(0) = 0$.

We conclude that the convergence domain consists only of the point 0.

4. It is crucial to notice, that the given equation is not an algebraic equation, because the terms $|z|$ and $|z|^2$ appear. As a consequence, one is not allowed to apply the fundamental theorem of Algebra!

To solve the equation, we set therefore $z = a + ib$. The equation becomes

$$a^2 + b^2 - (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 0\,.$$

We separate the real part and the imaginary part and obtain the system

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ -b\sqrt{a^2 + b^2} + b = 0\,, \end{cases}$$

namely

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ b(1 - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0\,. \end{cases}$$

From the second equation we get two systems

$$\begin{cases} b = 0\,, \\ a^2 - a|a| + a = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} b \neq 0\,, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1\,, \\ 1 = 0\,. \end{cases}$$

The second system admits no solutions. The first one admits $b = 0, a = 0$ and $b = 0, a = -1/2$. The solutions are therefore $z = 0$ and $z = -1/2$.