Musterlösung Schnellübung 4

1. Aus Aufgabe 1 Serie 7 wissen wir, dass

$$\operatorname{arcsinh}(\mathrm{y}) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

ist. Also gilt $b)$ ist gleich $a)$.

Weiter gilt

$$\beta \log(y + \sqrt{y^2+1})^{1/\beta} = \log(y + \sqrt{y^2+1})^{\beta \cdot 1/\beta} = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

also $b)$ ist gleich $d)$.

Der Vorschlag $c)$ ist dagegen falsch (bzw. nicht dasselbe wie in $a)$, $b)$ und $d)$), denn im allgemein gilt nicht

$$\log y + \log(\sqrt{y^2+1}) = \log(y + \sqrt{y^2+1})\,.$$

2. Aus der Definition erhalten wir direkt

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1} - 0}{h} = |h|^\alpha \frac{|h|}{h}\,,$$

d.h.

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Deshalb existiert der Limes für h gegen Null genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f'_\alpha(0) = \lim_{h\to 0} |h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

3. **a)** Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

Bitte wenden!

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1+\sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1+\sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\
f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\
f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\
f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots.
\end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. Der Definitionsbereich von g wird durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \log(\arctan x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt. Wir bekommen somit

$$\begin{cases} \arctan x > -1 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > \tan(-1) = -\tan(1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

und daher ist der Definitionsbereich $(-\tan(1), 0) \cup (0, \infty)$.

Für $x > 0$ gilt $g(x) < 0$; für $-\tan(1) < x < 0$ gilt $g(x) > 0$. Ferner ist es nicht schwierig zu sehen, dass

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty\,,$$

d.h. $x = 0$ ist eine vertikale Asymptote von g.

Ausserdem gilt

$$\lim_{x\to(-\tan(1))^+} g(x) = 0^+\,, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{-1}{\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}\,.$$

Somit sehen wir, dass $y = \frac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}$ eine horizontale Asymptote ist und dass die Funktion g stetig fortsetzbar ist an der Stelle $x = -\tan(1)$.

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$g'(x) = \frac{1}{\log^2(\arctan x + 1)} \cdot \frac{1}{\arctan x + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\,,$$

Bitte wenden!

was positiv ist genau dann, wenn $\arctan x + 1 > 0$ ist. Wir schliessen, dass für alle x in dem Definitionsbereich $g'(x) > 0$ ist. Daher ist g streng monoton wachsend auf $(-\tan(1), 0)$ und $(0, \infty)$.

Von oben wissen wir, dass g unbeschränkt ist und somit keine Extrema besitzt.

Zuletzt gibt es keine kritischen Punkte.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. From exercise 1 Serie 7 we know that

$$\operatorname{arcsinh}(\mathrm{y}) = \log(y + \sqrt{y^2+1})\,.$$

Then $b)$ is equal to $a)$.

Furthermore, we have

$$\beta \log(y + \sqrt{y^2+1})^{1/\beta} = \log(y + \sqrt{y^2+1})^{\beta \cdot 1/\beta} = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

hence $b)$ is equal to $d)$.

The answer $c)$ is on the other hand false (namely, not equal to either $a)$, or $b)$ or $d)$), because in general it is not true that

$$\log y + \log(\sqrt{y^2+1}) = \log(y + \sqrt{y^2+1})\,.$$

2. From the definition we immediately obtain

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1} - 0}{h} = |h|^\alpha \frac{|h|}{h}\,,$$

i.e.

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Hence, the limit for h towards zero exists if and only if $\alpha > 0$. In that case, we get

$$f_\alpha'(0) = \lim_{h \to 0} |h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

3. **a)** Since f is continuous and the interval of definition is compact, there exist a global maximum and a global minimum. They reside either on the boundary of the interval or in the interior. Since f is differentiable in the interior, in the last case they must be critical points. We compute:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

The only candidates for global extreme points are the boundary points -2, 2 and the interior point $-\frac{4}{3}$. The values of the functions at these points are:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

The largest value is the one assumed at $x = -\frac{4}{3}$, the smallest one the one assumed at $x = 2$. Hence, f has a global maximum at $x = -\frac{4}{3}$ and a global minimum at $x = 2$.

Bitte wenden!

b) Since f is continuous and the interval of definition is compact, there exist a global maximum and a global minimum. If it resides in the interior of the interval of definition, it must be a critical point of f, since f is differentiable in the interior. We compute:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

This is equivalent to

$$-x^2-2x+1=0\,,$$

or

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{-2} = -1\pm\sqrt{2}.$$

The value $-1-\sqrt{2} < -1$ is not in the interval of definition of f: on the other hand the value $-1+\sqrt{2}$ resides. The candidates are then $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. The values of the functions at these points are:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\cdot\tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

The largest value is the one assumed at $x=-1+\sqrt{2}$, the smallest one the one assumed at $x=-1$. Hence, f has a global maximum at $x=-1+\sqrt{2}$ and a global minimum at $x=-1$.

c) Since f is continuous and the interval of definition is compact, there exist a global maximum and a global minimum. We look for the critical points of f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Because $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, this is equivalent to

$$x^2-x-1=0.$$

The critical points of f are therefore

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Both values are in the interior of the interval of definition. The candidates for extreme values are the boundary points $x=-1$ and $x=2$, and the critical points $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. The values of the functions at these points are:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\ f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\ f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\ f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

The largest value is the one assumed at $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, the smallest one the one assumed at $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Hence, f has a global maximum at $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and a global minimum at $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. The domain of definition of g is given by the following conditions

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \log(\arctan x + 1) \neq 0 \,. \end{cases}$$

We then obtain

$$\begin{cases} \arctan x > -1 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > \tan(-1) = -\tan(1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

and thus the domain of definition is $(-\tan(1), 0) \cup (0, \infty)$.

For $x > 0$, it is $g(x) < 0$; for $-\tan(1) < x < 0$ it is $g(x) > 0$. Moreover, it is not difficult to see that

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \,, \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = \infty \,,$$

i.e. $x = 0$ is a vertical asymptote of g.

In addition, we have

$$\lim_{x \to (-\tan(1))^+} g(x) = 0^+ \,, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{-1}{\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)} \,.$$

Then we see that $y = \frac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}$ is an horizontal asymptote and that the function g is continuously extendable at the point $x = -\tan(1)$.

With the chain rule we obtain

$$g'(x) = \frac{1}{\log^2(\arctan x + 1)} \cdot \frac{1}{\arctan x + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \,,$$

which is positive iff $\arctan x + 1 > 0$. We conclude that for all x in the domain of definition we have $g'(x) > 0$. Hence g is strictly monoton increasing on $(-\tan(1), 0)$ and $(0, \infty)$.

From above we know that it is unbounded and thus it admits no extreme values.

Eventually, there are no critical points.