Musterlösung Schnellübung 6

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2\log x)}{x^2} \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass $y(x)$ eine Lösung von dieser Differentialgleichung ist. Definieren wir

$$x(t) := e^t \,,$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(x(t)) &= y'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t))e^t = y'(x(t))x(t),\\
\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(y'(x(t))x(t)\right) = y''(x(t))x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y'(x(t))\frac{d}{dt}x(t)\\
&= y''(x(t))(x(t))^2 + y'(x(t))x(t).
\end{aligned}$$

Da $y(x)$ ein Lösung der Differentialgleichung ist, folgt, dass die Funktion $k(t) := y(x(t))$ die Differentialgleichung

$$e^{-2t}\left(\ddot{k}(t) + 4k(t)\right) = \cos(2t)e^{-2t}$$

löst, d.h.

$$\ddot{k}(t) + 4k(t) = \cos(2t)\,.$$

Diese Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 4.$$

Die Nullstellen von $\text{chp}(\lambda)$ sind

$$\lambda_1 = 2i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2i.$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$k_h(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\,.$$

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatzt

$$k_p(t) = t\left(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\right)\,.$$

Bitte wenden!

Das liefert nun

$$-4\alpha \sin(2t) + 4\beta \cos(2t) = \cos(2t)\,,$$

d.h. $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{1}{4}$.

Die allgemeine Lösung ist somit

$$k(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t}{4} \sin(2t)\,.$$

Da $t = \ln(x)$ und $k(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ folgt $y(x) = k(\ln(x))$. Die allgemeine Lösung von (1) ist somit

$$y(x) = C_1 \cos(2\log x) + C_2 \sin(2\log x) + \frac{\log x}{4} \sin(2\log x)\,.$$

2. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cos(x)dx &= \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx + C \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int (1-\cos^2(x))dx + C \\ &= \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx + C.\end{aligned}$$

Definieren wir nun

$$K := \int \cos^2(x)dx$$

erhalten wir die Gleichung

$$2K = \sin(x)\cos(x) + x + C.$$

Lösen wir das nach K auf, erhalten wir also

$$K = \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x) + \tilde{C}.$$

3. **a)** Mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g(s) &:= \int_0^s \cos^3(t)\,dt \quad \text{und} \\ h(x) &:= x^3 \end{aligned}$$

gilt $f(x) = g(h(x))$. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $g(s)$ differenzierbar mit $g'(s) = \cos^3(s)$. Aus der Kettenregel folgt daher

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos^3\left(x^3\right) \cdot 3x^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $f(x)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos(x))$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos(\cos(x)) > 0$. Also ist $f(x)$ stetig und streng monoton wachsend und deshalb eine bijektive Funtion von $\mathbb{R}$ nach image$(f) \subset \mathbb{R}$. Es gilt $f(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert also:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos(\pi))} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos(1)} .$$

4. a) Substitution $u := \log x$, $du = \frac{1}{x}dx$;
Integrationsgrenzen $x = e \mapsto u = \log(e) = 1$, $x = e^2 \mapsto u = \log(e^2) = 2$: Also gilt

$$\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \int_1^2 u^2\, du = \frac{1}{3}\, u^3\Big|_{u=1}^{2} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} .$$

Bem.: Man kann auch direkt benutzen, dass der Integrand die Form $f(x)^2 \cdot f'(x) = \frac{1}{3}(f(x)^3)'$ hat und daher die Funktion $\frac{1}{3}\log(x)^3$ eine Stammfunktion ist.

b) Substitution $u := 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$.
Integrationsgrenzen: Während x von -1 nach 1 läuft, läuft $u = 1 + x^2$ von 2 nach 1 (bei $x = 0$) und wieder zurück nach 2. Also:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\
&= \int_{2}^{1} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\, du + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\, du \\
&= -\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\, du + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\, du \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\, dx &= -\frac{1}{3}\, \cos(3x - \pi/4)\Big|_{x=0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{3}\, \cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{3}\, \cos\frac{\pi}{4} \\
&= 2\frac{1}{3}\cos(\pi/4) = \frac{1}{3}\sqrt{2} .
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) Wir integrieren partiell, bis wir statt eines Polynoms nur noch einen konstanten Faktor im Integral haben.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh}(2t) \ dt &= \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(2t)t \ dt \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\left[\cosh(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cosh(2t)dt\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\cosh(2) - \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \frac{1}{2}\cosh(2) + \frac{1}{4}\sinh(2) = \frac{1}{4}(3\sinh(2) - 2\cosh(2)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}(e^2 - e^{-2}) - e^2 - e^{-2}) = \frac{1}{8}(e^2 - 5e^{-2}).
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. We consider the ODE

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2\log x)}{x^2} \quad \text{for} \quad x > 0. \tag{2}$$

We assume that $y(x)$ is a solution of this ODE. We define

$$x(t) := e^t\,,$$

and it follows

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(x(t)) &= y'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t))e^t = y'(x(t))x(t), \\ \frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(y'(x(t))x(t)\right) = y''(x(t))x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y'(x(t))\frac{d}{dt}x(t) \\ &= y''(x(t))(x(t))^2 + y'(x(t))x(t). \end{aligned}$$

Since $y(x)$ is a solution of the ODE, it follows that the function $k(t) := y(x(t))$ solves the ODE

$$e^{-2t}\left(\ddot{k}(t) + 4k(t)\right) = \cos(2t)e^{-2t}\,,$$

i.e.

$$\ddot{k}(t) + 4k(t) = \cos(2t)\,.$$

This ODE has characteristic polynomial

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 4.$$

The zeros of chp(λ) are

$$\lambda_1 = 2i \quad \text{and} \quad \lambda_2 = -2i.$$

Hence, the general real solution of the homogeneous ODE is given by

$$k_h(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\,.$$

To find a particular solution, we make the ansatzt

$$k_p(t) = t\left(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\right)\,.$$

This gives

$$-4\alpha\sin(2t) + 4\beta\cos(2t) = \cos(2t)\,,$$

i.e. $\alpha = 0$ and $\beta = \frac{1}{4}$.

The general solution is hence

$$k(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t}{4} \sin(2t)\,.$$

Because $t = \ln(x)$ and $k(t) = y(x(t)) = y(e^t)$, it follows $y(x) = k(\ln(x))$. The general solution of (1) is

$$y(x) = C_1 \cos(2 \log x) + C_2 \sin(2 \log x) + \frac{\log x}{4} \sin(2 \log x)\,.$$

2. We write

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cos(x)dx &= \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx + C \\
&= \sin(x)\cos(x) + \int (1 - \cos^2(x))dx + C \\
&= \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx + C.
\end{aligned}$$

We now define

$$K := \int \cos^2(x)dx$$

and obtain the equation

$$2K = \sin(x)\cos(x) + x + C.$$

We solve it in K and get

$$K = \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x) + \tilde{C}.$$

3. **a)** With the functions

$$\begin{aligned}
g(s) &:= \int_0^s \cos^3(t)\,dt \quad \text{and} \\
h(x) &:= x^3
\end{aligned}$$

it holds $f(x) = g\,(h(x))$. By the fundamental theorem of Calculus, $g\,(s)$ is differentiable with $g'\,(s) = \cos^3(s)$. From the chain rule, it follows thus

$$f'\,(x) = g'\,(h\,(x)) \cdot h'\,(x) = \cos^3\left(x^3\right) \cdot 3x^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) By the fundamental theorem of Calculus, $f(x)$ is differentiable with derivative $f'(x) = \cos(\cos(x))$. For all $x \in \mathbb{R}$, we have $|\cos(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ and so $\cos(\cos(x)) > 0$. Then $f(x)$ is continuous and strictly monoton increasing and thus it is a bijective function of $\mathbb{R}$ onto image$(f) \subset \mathbb{R}$. We have $f(\pi) = 0$ and so $\pi = f^{-1}(0)$. The formula for the derivative of the inverse function gives:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos(\pi))} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos(1)}\,.$$

4. **a)** Substitution $u := \log x$, $du = \frac{1}{x}dx$;
Boundary of integration $x = e \mapsto u = \log(e) = 1$, $x = e^2 \mapsto u = \log(e^2) = 2$:
We have

$$\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \int_1^2 u^2\,du = \frac{1}{3}\,u^3\Big|_{u=1}^{2} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\,.$$

Rmk.: One can also use the fact that the integrand has the form
$f(x)^2 \cdot f'(x) = \frac{1}{3}(f(x)^3)'$ and then the function $\frac{1}{3}\log(x)^3$ is a primitive.

b) Substitution $u := 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$.
Boundary of integration: While x goes from -1 to 1, $u = 1 + x^2$ goes from 2 to 1 and then back again to 2. Hence:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= \int_{2}^{1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\
&= -\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\,dx &= -\frac{1}{3}\cos(3x - \pi/4)\Big|_{x=0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{3}\cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} \\
&= 2\frac{1}{3}\cos(\pi/4) = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) We proceed to integrate by parts till instead of a polynomial we obtain a constant factor in the integral.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh}(2t) \;\; dt &= \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(2t)t \; dt \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\left[\cosh(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cosh(2t)dt\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\cosh(2) - \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \frac{1}{2}\cosh(2) + \frac{1}{4}\sinh(2) = \frac{1}{4}(3\sinh(2) - 2\cosh(2)) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}(e^2 - e^{-2}) - e^2 - e^{-2}) = \frac{1}{8}(e^2 - 5e^{-2}).
\end{aligned}$$