Musterlösung Schnellübung 7

1. **a)** Das Integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{x=2}^{x=\xi} = \lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi) - \ln(\ln 2)\right)$$

existiert nicht, denn

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi)\right) = \infty.$$

b) Die Substitution $u = \ln x$ ergibt $du = \frac{dx}{x}$, also

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln\xi}\frac{du}{u^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\ln 2}^{u=\ln\xi}$$
$$= \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln\xi}+\frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Der im Vergleich zu Teil a) im Nenner hinzugekommene Faktor $\ln x$ bewirkt also eine Konvergenz des Integrales.

c) Wir substituieren $u = x^2$, so dass $du = 2x dx$ und

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi^2}\frac{du}{2\sqrt{1+u^2}}$$
$$= \lim_{\xi\to\infty}\left[\frac{1}{2}\mathrm{ArSinh}\, u\right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\mathrm{ArSinh}\,\xi^2 = \infty.$$

Dieses Integral existiert also ebenfalls nicht.

2. Wir benutzen (wiederholte) partielle Integration in Verbindung mit

$$\lim_{x\to 0} x^k(\ln x)^l = \lim_{x\to 0}\left(x^{\frac{k}{l}}(\ln x)\right)^l = \left(\lim_{x\to 0} x^{\frac{k}{l}}(\ln x)\right)^l = 0^l = 0 \qquad (1)$$

Bitte wenden!

für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx &= \underbrace{\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n \Big|_{x=0}^{x=1}}_{= 0 \text{ wegen } (1)} - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} \, dx \\
&= -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx \\
&= \underbrace{-\frac{n x^{m+1}}{(m+1)^2}(\ln x)^{n-1} \Big|_{x=0}^{x=1}}_{= 0 \text{ wegen } (1)} + \frac{n}{(m+1)^2} \int_0^1 x^{m+1} \frac{(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x} \, dx \\
&= \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-2} dx \\
&= \underbrace{-\frac{n x^{m+1}}{(m+1)^3}(\ln x)^{n-2} \Big|_{x=0}^{x=1}}_{= 0 \text{ wegen } (1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-3} dx \\
&= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-3} dx
\end{aligned}$$

Wir wiederholen die partielle Integration solange, bis der Exponent vom $\ln x$ im Integranden zu Null geworden ist. Das liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx &= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \int_0^1 x^m (\ln x)^0 dx \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. **a)** Die Funktion $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, stetig und positiv. Wegen $\cosh(-x) = \cosh x$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\cosh x} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

Siehe nächstes Blatt!

falls letzeres Integral konvergiert. Für $x > 0$ gilt

$$e^x + e^{-x} \geq e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

Daher gilt

$$\frac{1}{\cosh x} \leq \frac{4}{x^2}$$

für alle hinreichend grossen x. Desweiteren können wir Division durch Null ausschliessen, da $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert das Integral also.

b) Die Funktion $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ ist auf $]0, \pi/2[$ definiert und stetig. Das Integral teilt sich auf in die beiden Integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx \text{ und } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx.$$

Mit der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2(x)}{1} = 1.$$

Daher setzt sich die Funktion stetig fort auf $[0, \frac{\pi}{4}]$, und $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ wird ein gewöhnliches Riemann-Integral.

Für das andere Integral substituieren wir $x = \frac{\pi}{2} - y$ mit $dx = -dy$. Das liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\pi/4}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\tan x}{x}\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\tan(\pi/2 - y)}{\pi/2 - y}\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\cos y}{(\pi/2 - y) \cdot \sin y}\, dy\,.
\end{aligned}$$

Für alle $y \in]0, \pi/4]$ gilt nun

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin y \leq y \\ \cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\cos y}{(\pi/2 - y) \cdot \sin y} \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{y}.$$

Nach dem Minorantenkriterium divergiert das Integral also.

c) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x - x^3}}$ ist auf $]0, 1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1.

Bitte wenden!

An der Stelle 0: Es gilt $\sqrt{x - x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{4}\right)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für jedes $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Also konvergiert das Integral an der Stelle 0.

An der Stelle 1: Es gilt $\sqrt{x - x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-x)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

für jedes $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Also konvergiert das Integral an der Stelle 1.

Daher konvergiert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

d) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^4 - x^5}$ ist auf $]0, 1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1. Bei 0 haben wir

$$\frac{1}{x^4 - x^5} = \frac{1}{x^4(1-x)} \geq \frac{1}{x^4}$$

für jedes $x \in]0, 1[$. Also divergiert das Integral bei 0. Ein ähnliches Problem besteht an der Stelle 1.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. **a)** The integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{x=2}^{x=\xi} = \lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi) - \ln(\ln 2)\right)$$

does not exist, because

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi)\right) = \infty.$$

b) The substitution $u = \ln x$ gives $du = \frac{dx}{x}$, and thus

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln\xi}\frac{du}{u^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\ln 2}^{u=\ln\xi}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln\xi}+\frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.\end{aligned}$$

In contrast to point a), the additional factor $\ln x$ at the denominator causes the integral to converge.

c) We substitute $u = x^2$, so that $du = 2x dx$ and

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi^2}\frac{du}{2\sqrt{1+u^2}}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\left[\frac{1}{2}\mathrm{ArSinh}\, u\right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\mathrm{ArSinh}\,\xi^2 = \infty.\end{aligned}$$

Not even this integral exists.

2. We apply several times integration by parts and the fact that

$$\lim_{x\to 0} x^k(\ln x)^l = \lim_{x\to 0}\left(x^{\frac{k}{l}}(\ln x)\right)^l = \left(\lim_{x\to 0} x^{\frac{k}{l}}(\ln x)\right)^l = 0^l = 0 \qquad (2)$$

Bitte wenden!

for arbitrary $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx &= \underbrace{\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n \Big|_{x=0}^{x=1}}_{\text{= 0 because of (2)}} - \int\limits_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} \, dx \\
&= -\frac{n}{m+1} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx \\
&= \underbrace{-\frac{n x^{m+1}}{(m+1)^2}(\ln x)^{n-1} \Big|_{x=0}^{x=1}}_{\text{= 0 because of (2)}} + \frac{n}{(m+1)^2} \int\limits_0^1 x^{m+1} \frac{(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x} \, dx \\
&= \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-2} dx \\
&= \underbrace{-\frac{n x^{m+1}}{(m+1)^3}(\ln x)^{n-2} \Big|_{x=0}^{x=1}}_{\text{= 0 because of (2)}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-3} dx \\
&= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-3} dx
\end{aligned}$$

We integrate by parts till the exponent of $\ln x$ in the integral is zero. That gives:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx &= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^0 dx \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. a) The function $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ is defined on $\mathbb{R}$, continuous and positive. Because $\cosh(-x) = \cosh x$, we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\cosh x} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

if the last integral converges. For $x > 0$ we have

$$e^x + e^{-x} \geq e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Therefore, it holds true

$$\frac{1}{\cosh x} \leq \frac{4}{x^2}$$

for all sufficiently large x. Furthermore, we can rule out the division by zero, since $\cosh x \geq 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Because of the direct comparison test, the integral converges.

b) The function $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ is defined on $]0, \pi/2[$ and continuous. The integral can be splitted into the integrals

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx \text{ and } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx.$$

With the de l'Hôpital rule it follows

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x)}{1} = 1.$$

Hence, the function can be prolonged with continuity on $[0, \frac{\pi}{4}]$, and $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ becomes an ordinary Riemann integral.

For the other integral we substitute $x = \frac{\pi}{2} - y$ with $dx = -dy$. This gives

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pi/4}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\tan x}{x}\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\tan(\pi/2 - y)}{\pi/2 - y}\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\cos y}{(\pi/2 - y)\cdot \sin y}\, dy\,.
\end{aligned}$$

For all $y \in]0, \pi/4]$ we now have

$$\left\{\begin{array}{l} \sin y \leq y \\ \cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cos y}{(\pi/2 - y)\cdot \sin y} \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{y}.$$

Because of the direct comparison test, the integral diverges.

c) The function $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}$ is defined on $]0, 1[$ and continuous. Problems may arise at the points 0 and 1.

At the point 0: it holds true $\sqrt{x - x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, and thus

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{4}\right)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

for all $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Hence, the integral converges at the point 0.

At the point 1: it holds true $\sqrt{x-x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, and so

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-x)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

for any $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Hence, the integral converges at the point 1.

Therefore,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$$

converges.

d) The function $x \mapsto \frac{1}{x^4-x^5}$ is defined on $]0, 1[$ and continuous. Problems may arise at the points 0 and 1. At 0 we have

$$\frac{1}{x^4-x^5} = \frac{1}{x^4(1-x)} \geq \frac{1}{x^4}$$

for any $x \in]0, 1[$. Hence, the integral diverges at 0. A similar problem arises at the point 1.