Serie 10

1. **a)** Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

b) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0$$

zu der Anfangsbedingung $y(1) = y'(1) = 2$.

c) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q. Für welche Werte von q bleiben **alle** Lösungen für $x \to \infty$ beschränkt ?
Hinweis: Sorgfältige Fallunterscheidung für Nullstellen des charakteristischen Polynoms !

d) Bestimme die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y^{(3)}(0) = 1$$

erfüllt.

2. **a)** Finde eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so dass e^{-x}, e^{x}, $e^{-\pi x}$ und $e^{\pi x}$ Lösungen der Gleichung sind.

b) Finde eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so dass e^{-10x} und $e^{3x}\cos(3x)$ Lösungen der Gleichung sind.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

Bitte wenden!

a) $2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$;

b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 26. November 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 26. November 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Sei L der Differentialoperator

$$L = D^4 + 2D^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y(0) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(b) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y(0) = 1$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(c) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(d) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y'(0) = 0$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

b) Wir betrachten das Randwertproblem

$$u''(x) - 4u(x) = -1\,, \quad x \in (0,1)$$

mit $u(0) = 0$ und $u'(1) + u(1) = 0$. Wie gross ist der maximale Wert von $u(x)$?

(a) 0.

(b) $\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{e^4+1}$.

(c) $e^6 + 2e^4 - e^2$.

(d) $-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{3e^4+1} + \frac{1}{4}$.

(e) $-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{e^4+1} + \frac{1}{2}$.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. **a)** Determine the general solution of the ODE

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

b) Determine the general solution of the ODE

$$y'' + y' = 0$$

with initial condition $y(1) = y'(1) = 2$.

c) The ODE

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

contains a real parameter q. For which values of q do **all** the solutions remain bounded for $x \to \infty$?
Hint: Distinguish carefully the different cases concerning the zeros of the characteristic polynomial!

d) Determine the general (real) solution of the ODE

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

which satisfies the initial conditions

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y^{(3)}(0) = 1\,.$$

2. **a)** Find a linear ODE with constant coefficients such that e^{-x}, e^{x}, $e^{-\pi x}$ and $e^{\pi x}$ are solutions of the equation.

b) Find a linear ODE with constant coefficients such that e^{-10x} and $e^{3x}\cos(3x)$ are solutions of the equation.

3. Determine the general solution of the following ODEs:

a) $2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1;$

b) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^{x}.$

4. **Online Exercises**

Multiple answers are possible.

Bitte wenden!

a) Let L be the differential operator

$$L = D^4 + 2D^2.$$

Which of the following claims are right?

(a) The space of the solutions of $Ly = 0$ with $y(0) = 0$ is a 3-dim vector space.

(b) The space of the solutions of $Ly = 0$ with $y(0) = 1$ is a 3-dim vector space.

(c) The space of the solutions of $Ly = 0$ with $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ is a 3-dim vector space.

(d) The space of the solutions of $Ly = 0$ with $y'(0) = 0$ is a 2-dim vector space.

b) We consider the boundary problem

$$u''(x) - 4u(x) = -1\,, \quad x \in (0,1)$$

with $u(0) = 0$ and $u'(1) + u(1) = 0$. Which is the maximal value of $u(x)$?

(a) 0.

(b) $\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{e^4+1}$.

(c) $e^6 + 2e^4 - e^2$.

(d) $-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{3e^4+1} + \frac{1}{4}$.

(e) $-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3e^6+2e^4-e^2}}{e^4+1} + \frac{1}{2}$.