Serie 11

1. Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante f verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz ν angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

2. **a)** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{für} \;\; x > 0\,.$$

b) Finden Sie die Lösung des Problems von Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - 5y'(x) + \frac{8}{x} y(x) = x^2\,, \\ y(1) = 0\,, \\ y'(1) = 1\,. \end{cases}$$

3. Man berechne das Integral

$$\int_0^a x^k \, dx\,, \quad (k \in \mathbb{N}, a > 0)\,,$$

mittels Riemannscher Summen. Dabei benutze man eine äquidistante Teilung des Intervalls $[0, a]$.

Bitte wenden!

`Bemerkung`**:** Um die Aufgabe zu lösen, kann es nützlich sein, diese Formel zu hinweisen:

Es gibt rationale Zahlen $q_1, \cdots, q_k$, so dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + q_k n^k + \cdots + q_1 n\,.$$

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 03. Dezember 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 03. Dezember 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$,
(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,du$,
(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,dx$,
(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,dt$.

b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist;} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

(a) integrierbar, weil sie beschränkt ist.
(b) nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.
(c) integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.
(d) nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0,1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. A mass m, constrained to a spring with spring constant f and which oscillates without friction along the x-Axis, is stressed by a sinusoidal exterior force with frequence ν. The motion of the mass satisfies the ODE

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

whereas $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ is the natural frequency of the system mass-spring. At the initial time $t = 0$ the mass is at rest at the place $x = 0$: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

a) Solve the ODE in the case $\omega \neq \nu$ (no resonance).

b) Solve the ODE for the case $\omega = \nu$ (resonance).

c) Draw a picture of the result in **a)** and **b)** on the interval $[0, 10\pi]$ for $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ respectively $\omega = \nu = 1$. What do you observe?

2. **a)** Solve the ODE

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{for} \quad x > 0\,.$$

b) Find the solution of the Cauchy-problem

$$\begin{cases} xy''(x) - 5y'(x) + \frac{8}{x}y(x) = x^2\,, \\ y(1) = 0\,, \\ y'(1) = 1\,. \end{cases}$$

3. Compute the integral

$$\int_0^a x^k\,dx\,, \quad (k \in \mathbb{N}, a > 0)\,,$$

with the help of the Riemann sums. Use an equidistant partition of the interval $[0, a]$.

`Observation:` To solve the exercise, it may be useful to recall this formula:

There are rational numbers $q_1, \cdots, q_k$, so that for all natural numbers n holds

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + q_k n^k + \cdots + q_1 n\,.$$

Bitte wenden!

4. Online Exercises

Multiple answers are possible.

a) Which of the following integrals does not coincide with the others in general?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$,
(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, du$,
(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\, dx$,
(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\, dt$.

b) Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational;} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Is f Riemann-integrable or not? And what is the correct argumentation? The function f is ...

(a) integrable, because it is bounded.

(b) not integrable, since it is discontinuous.

(c) integrable, since the points with $f(x) = 0$ are negligible and it coincide otherwise with a constant function.

(d) not integrable, because it takes in any sub-interval of $[0, 1]$ both the values 0 and 1, and then the Riemann sum does not converge.