D-ITET Analysis I HS 2015
Prof. Alessandra Iozzi

Serie 13

1. Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^3-x}$, **b)** $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx$.

2. Zerlegen Sie die folgenden rationalen Funktionen mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung so weit wie möglich

a) $\displaystyle\frac{x^2}{(x^2-9)^2}$, **b)** $\displaystyle\frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}$.

3. Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+16}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-1}{x(x^2-2)}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Abgabe: Diese Serie wird nicht mehr eingereicht.

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 17. Dezember 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

Bitte wenden!

a) Welche Substitution, falls überhaupt notwendig, ist im folgenden Integral günstig?

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx$$

(a) Substitution mit $t = \tan(x)$ und folglich mit $\sin(x) = t\cdot\cos(x)$ und $dt = \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

(b) Substitution mit $t = \sin(x)$ und folglich mit $dt = \cos(x)\,dx$.

(c) Substitution mit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und folglich mit $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

(d) Keine Substitution ist notwendig, denn die Gleichung $(\sin^3)'(x) = \cos^2(x)$ und die Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ führen direkt zur Lösung.

b) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = -\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(b) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \sin(\varphi)\sin(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(c) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx.$

(d) $\int 2x^2e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx.$

(e) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

c) Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 &= \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen

$$1 = f(0) = g(0) = 0.$$

Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf nicht einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

(c) Die Integrationskonstante fehlt.

(d) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

Siehe nächstes Blatt!

English version

1. Compute the following integrals

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^3 - x}$, **b)** $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx$.

2. Decompose the following rational functions via polynomial divsion and partial decomposition as far as possible.

a) $\displaystyle\frac{x^2}{(x^2-9)^2}$, **b)** $\displaystyle\frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}$.

3. Compute the following integrals:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+16}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-1}{x(x^2-2)}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

4. Online Exercises

Multiple answers are possible.

a) Which substitution, if ever necessary, is suitable in the following integral?

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx$$

(a) Substitution with $t = \tan(x)$ and consequently with $\sin(x) = t \cdot \cos(x)$ and $dt = \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

Bitte wenden!

(b) Substitution with $t = \sin(x)$ and consequently with $dt = \cos(x)\,dx$.

(c) Substitution with $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ and consequently with $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

(d) No substitution is needed, since the equation $(\sin^3)'(x) = \cos^2(x)$ and the formula $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ lead directly to the result.

b) Which of the following computations is not a correct application of the integration by parts formula?

(a) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = -\cos(\varphi)\cos(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(b) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \sin(\varphi)\sin(\varphi) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(c) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx.$

(d) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx.$

(e) All are correct applications of the integration by parts formula.

c) We compute

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 &= \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

and obtain by inserting

$$1 = f(0) = g(0) = 0.$$

Where is the mistake?

(a) One is not allowed to insert.

(b) The binomial formula is applied mistakenly.

(c) The costant of integration is missing.

(d) It is correct, because one can neglect a costant.