Serie 2

1. Finden Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktionen

a) $f_1(x) = 4 - x^2$,

b) $f_2(x) = \frac{|x-\sqrt{\pi}|}{\sqrt{\pi}}$,

c) $f_3(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f_4(x) = \frac{1}{(x-3)^{\frac{1}{8}}}$,

e) $f_5(x) = \arctan(x^4)$,

und zeichnen Sie ihren Graphen.

2. Seien X und Y Mengen und betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

d) Ist im Allgemeinen wahr, dass $f(A^c) = f(A)^c$ gilt?

Bitte wenden!

3. Seien X, Y und Z Mengen, und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Implikationen:

a) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

d) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 1. Oktober 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 1. Oktober 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt monoton wachsende Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt monoton fallende Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $-f$ ist eine strikt monoton absteigende Funktion.
(b) $f + g$ ist eine strikt monoton wachsende Funktion.
(c) $f - g$ ist eine strikt monoton wachsende Funktion.
(d) fg ist eine strikt monoton absteigende Funktion.

b) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) fg ist gerade.
(b) fg ist ungerade.
(c) fg^2 ist gerade.
(d) $f + g$ ist gerade.

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Inverse von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^4$ ist...

(a) $x^{\frac{1}{4}}$.

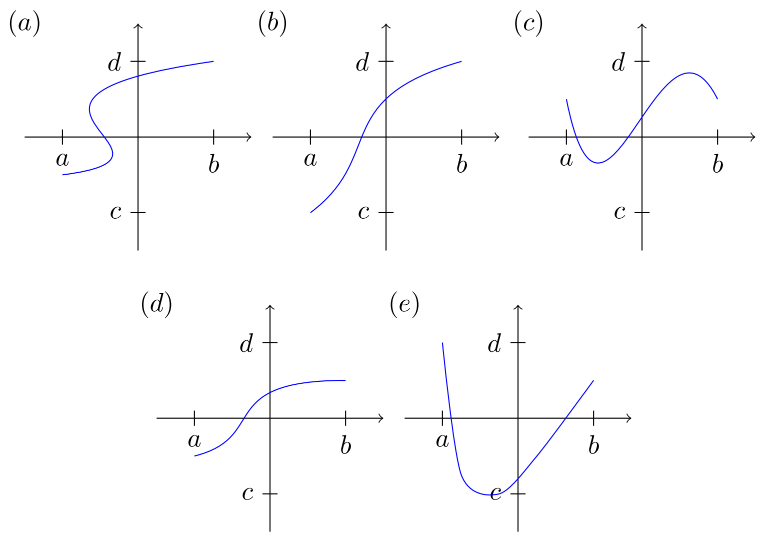
(b) existiert nicht.

(c) $\frac{1}{4}x$.

(d) x^{-4}.

(e) $-x^4$.

d) Welches der folgenden Bilder ist der Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (b).

(b) (a) und (b).

(c) (b) und (d).

(d) (a), (b) und (d).

(e) (b), (c), (d) und (e).