Serie 3

1. Zeigen Sie mittels des Epsilon-Delta-Kriteriums, dass die Funktion

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist.

2. Eine auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $K \geq 0$ falls

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in D\,.$$

a) Man zeige: Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Ist jede stetige Funktion Lipschitz-stetig?

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe **1.** Genauer sollten Sie so vorgehen:

1. Nehmen Sie an, dass die Funktion aus Aufgabe **1.** Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $K > 0$ ist. Beweisen Sie dann, dass für alle $x > 0$

$$1 \leq K\sqrt{x}$$

gilt.

2. Betrachten Sie nun ein $x :\ 0 < x < \frac{1}{K^2}$ und Sie erhalten einen Widerspruch.

3. Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) := \begin{cases} 3\sqrt{-x} + 1, & \text{falls } x < 0; \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1; \\ x^{10} - 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Bestimme $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

4. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - b^2}{x - b}, & \text{falls } x \neq b; \\ 0, & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

Bitte wenden!

a) Existiert $g(b)$?

b) Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b} g(x)$?

c) Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 8. Oktober 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 8. Oktober 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\pi} \frac{x^3-x^2(2\pi+1)+\pi x(\pi+2)-\pi^2}{x-\pi}$.

(a) existiert nicht,
(b) ∞,
(c) π^2,
(d) 0.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

(a) existiert nicht,
(b) ∞,
(c) -1,
(d) 1

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

(a) $\frac{1}{6}$,
(b) ∞,
(c) -3,
(d) 1