D-ITET | Analysis I | HS 2015
Prof. Alessandra Iozzi

Serie 5

1. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

`Hinweis`: Benutzen Sie die Bernoullische-Ungleichung: Sei $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen Null konvergiere. Man beweise, dass dann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ebenfalls gegen Null konvergiert.

3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Man zeige: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R}\,,$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und besitzt ebenfalls den Grenzwert c.

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 22. Oktober 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

Bitte wenden!

4. **Online-Aufgaben**

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 22. Oktober 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ ist...

(a) existiert nicht,
(b) 1,
(c) ∞,
(d) $\frac{1}{2}$,
(e) 0.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ ist...

(a) existiert nicht,
(b) 1,
(c) ∞,
(d) 0.

c) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1} n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) Die Folge ist monoton fallend,
(b) Die Folge ist beschränkt,
(c) Die Folge ist konvergent,
(d) Die Folge ist monoton wachsend,
(e) Der Limes der Folge ist 1.

d) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$...

(a) konvergiert,
(b) divergiert gegen $+\infty$,
(c) divergiert gegen $-\infty$,
(d) hat keine der anderen genannten Eigenschaften.

e) Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

(a) Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind. Daher divergiert die Reihe,
(b) Bei jedem Schritt addiert man weniger dazu als beim vorangegangenen. Daher konvergiert die Reihe,

Siehe nächstes Blatt!

(c) Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton. Daher konvergiert die Reihe,

(d) Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert. Daher konvergiert die Reihe absolut.

English version

5. Check whether the following series converge or diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

`Hint`: Use the Bernoulli's inequality: Let $x \geq -1$. Then

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}\,.$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

6. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence, that converges to zero. Show that the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ given by

$$b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$

converges to zero as well.

7. Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be three real valued sequences such that

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}\,.$$

Show that: If $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge and

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R}\,,$$

then $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is also a convergent sequence with limit c.

8. Online-Exercises

Multiple answers are possible.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ is...

(a) it does not exist,
(b) 1,
(c) ∞,
(d) $\frac{1}{2}$,

Siehe nächstes Blatt!

(e) 0.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ is...

(a) it does not exist,

(b) 1,

(c) ∞,

(d) 0.

c) We are given the sequence $a_n = \frac{n}{n+1}\, n \in \mathbb{N}$. Which one of the following statements is *false*?

(a) The sequence is monotone decreasing,

(b) The sequence is bounded,

(c) The sequence is convergent,

(d) The sequence is monotone increasing,

(e) The limit of the sequence is 1.

d) The series $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$...

(a) converges,

(b) diverges to $+\infty$,

(c) diverges to $-\infty$,

(d) has none of the aforementioned properties.

e) Which one of the following justifications for statements about a series is logically correct?

(a) The series has infinite terms larger than zero. Therefore, the series diverges,

(b) At every step one adds a quantity always smaller than before. Hence, the series converges,

(c) The sequence of the partial sums of the series is monotone. Hence, the series converges,

(d) Every term of the series is positive and the series itself converges. Hence, the series converges absolutely.