Serie 9

1. Man berechne den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschliesslich des Gliedes 5. Ordnung.

`Hinweis`: Benutzen Sie die Taylor-Reihen, die Sie in der Vorlesung gesehen haben oder die Sie in Ihrem Buch finden können.

2. Berechnen Sie das Taylor-Polynom des Grades 8 von f an der Stelle $x = 0$, wobei

$$f(x) = [x^2 - \log(1 + x^2)] \sin^2(x)$$

ist.

`Hinweis`: Benutzen Sie die Taylor-Reihen, die Sie in der Vorlesung gesehen haben oder die Sie in Ihrem Buch finden können.

3. Wir wollen mit einem Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ mit Hilfe des Taylor-Polynoms $\sin 1$ berechnen. Bis zu welcher Ordnung müssen wir das Taylor-Polynom berechnen?

`Hinweis`: Betrachten Sie das Taylor-Polynom von $\sin x$ an der Stelle $x = 0$.

Abgabe: Donnerstag mittag (bis 13:00), 19. November 2015, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Donnerstag abend (bis 20:00), 19. November 2015.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(a) $(1 - x)^{-1}$.

Bitte wenden!

(b) $(1-x)^{-2}$.

(c) $(1+x)^{-2}$.

(d) $x \cdot (1-x)^{-2}$.

(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

c) Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(a) $\sin(x) + \sinh(x)$.

(b) $x \sin(x) + \frac{1}{x} \sinh(x)$.

(c) $x \sin(x) + x \sinh(x)$.

(d) $x \cos(x) + \frac{1}{x} \cosh(x)$.

English version

1. Compute the beginning of the Taylor series of the function

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

around 0 till order 5.

`Hint`: Use the Taylor series which you have seen in the lecture or which you can find in your book.

2. Compute the Taylor polynomial of f of grade 8 about $x = 0$, whereas

$$f(x) = [x^2 - \log(1 + x^2)] \sin^2(x)\,.$$

`Hint`: Use the Taylor series which you have seen in the lecture or which you can find in your book.

3. We want to compute $\sin 1$ with an error smaller than $(100!)^{-1}$ with the help of the Taylor polynomial. Untill which order are we required to compute the Taylor polynomial?

`Hint`: Consider the Taylor polynomial of $\sin x$ around $x = 0$.

4. Online Exercises

Multiple answers are possible.

a) Which of the following functions does the power series $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ represent?

(a) $(1 - x)^{-1}$.
(b) $(1 - x)^{-2}$.
(c) $(1 + x)^{-2}$.
(d) $x \cdot (1 - x)^{-2}$.
(e) $x \cdot (1 - x)^{-3}$.

b) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an arbitrary infinitely often differentiable function. Which of the following claims is *not* true in general?

(a) f has a Taylor series at $x_0 = 0$.

Bitte wenden!

- **(b)** The convergence radius of the Taylor series is ≥ 0, but not necessarily > 0.
- **(c)** Where the Taylor series converges, there it represents the function f.
- **(d)** If f is given by a power series, then the series is equal to the Taylor series.

c) Which functions is represented by means of the series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$?

- **(a)** $\sin(x) + \sinh(x)$.
- **(b)** $x \sin(x) + \frac{1}{x} \sinh(x)$.
- **(c)** $x \sin(x) + x \sinh(x)$.
- **(d)** $x \cos(x) + \frac{1}{x} \cosh(x)$.