Schnellübung 2

1. Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Identitäten:

a)

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n},$$

b)

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

Bitte wenden!

4. Sei

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad u(x) := \begin{cases} e^{k\cos^2(x)}, & \text{falls } x < 0; \\ \sqrt{\pi} + \frac{x^{\frac{7}{9}}}{\alpha}, & \text{falls } 0 \leq x < 1; \\ \frac{3e^{x^5}}{t} + \sqrt{\pi}, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, so dass u überall stetig ist.