Schnellübung 3

1. Finden Sie den Realteil und den Imaginärteil von

$$z = \frac{(2+i)(5-\frac{i}{2})}{1+\frac{i}{2}}\,.$$

2. Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen, ob sie injektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\, z \mapsto z^2 - 1$,

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\, z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.

3. Die Funktionen $K_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien definiert durch

$$K_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|}\,.$$

a) Man zeige, dass alle Funktionen K_n stetig sind. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$x \xmapsto{K} K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)\,,$$

definiert bzw. stetig?

b) Betrachten Sie nun die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x)$$

und finden Sie ihren Konvergenzbereich.

4. Finden Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$|z|^2 - z|z| + z = 0\,.$$

Bitte wenden!

English version

1. Find the real part and the imaginary part of

$$z = \frac{(2+i)(5-\frac{i}{2})}{1+\frac{i}{2}}\,.$$

2. Determine whether the following functions are injective:

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\, z \mapsto z^2 - 1$,

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\, z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.

3. The functions $K_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, are defined by

$$K_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|}\,.$$

a) Show that all the functions K_n are continuous. For which $x \in \mathbb{R}$ is the function

$$x \xmapsto{K} K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)\,,$$

defined / continuous?

b) Consider now the series of functions

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x)$$

and find its convergence domain.

4. Find the complex roots of the equation

$$|z|^2 - z|z| + z = 0\,.$$