Musterlösung Serie 1

(1) (a) 3. Ordnung; nicht linear.
(b) 1. Ordnung; nicht linear.
(c) 2. Ordnung; linear.
(d) 2. Ordnung; linear.
(e) 2. Ordnung; linear.

(2) (a) Es folgt, durch Integration von $u_y = 2x$ bezüglich y,

$$u = 2xy + c(x).$$

Da $u_x = 2(x+y)$, folgt es

$$2y + c'(x) = 2(x+y). \tag{♣}$$

Die Gleichung (♣) ist gleichwertig mit

$$c'(x) = 2x.$$

Nun integrieren wir bezüglich x und bekommen

$$c(x) = x^2 + c_1,$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$. Also,

$$u = 2xy + x^2 + c_1.$$

Aus der Anfangsbedingung schliesst man $c_1 = 0$. Tatsächlich erfüllt die Funktion $u(x,y) = 2xy + x^2$ das System.

(b) Jede Lösung vom System ist von der Klasse C^∞. Insbesondere erfüllt sie $u_{xy} = u_{yx}$. Aber das führt zu einem Widerspruch, weil

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2(x+y)) = 2 \neq A = \frac{\partial}{\partial x}(Ax) = u_{yx}.$$

(3) In der partiellen Differentialgleichung $u_{xx} = 0$ gibt es keine Ableitung bezüglich y. Deshalb lösen wir sie, indem wir die Variable y als eine Konstante betrachten. Die allgemeine Lösung ist durch

$$u(x,y) = c_1(y)x + c_2(y)$$

gegeben.

(4) Die folgenden Gleichungen ergeben sich durch die Kettenregel

$$\begin{aligned} u_x &= u_s \frac{\partial s}{\partial x} + u_t \frac{\partial t}{\partial x} = u_s + u_t, \\ u_y &= -u_t, \\ u_{xx} &= u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt}, \\ u_{xy} &= -u_{st} - u_{tt}, \\ u_{yy} &= u_{tt}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

gleichwertig mit $u_{ss} = 0$ ist. Wie schon in der Aufgabe 3 gezeigt, hat die Letztere die Lösung $c_1(t)s + c_2(t)$. Also ist die allgemeine Lösung durch

$$c_1(x-y)x + c_2(x-y)$$

gegeben.

(5) Wir setzen $v := u_{xy}$. Damit wird die partielle Differentialgleichung zur gewönlichen Differentialgleichung

$$v_x + 2v = 0$$

transformiert. Die allgemeine Lösung wird durch

$$v(x,y) = c(y)e^{-2x}$$

gegeben. Daraus folgt

$$u(x,y) = c_1(y)e^{-2x} + c_2(x) + c_3(y).$$