Musterlösung Serie 2

(1) Da der Koefficient von u_x shon 1 ist, sind die Charakteristiken durch

$$(\clubsuit) \qquad \gamma_{y_0} \,:\, t \mapsto (r, r(t,y_0), s(t,y_0))$$

gegeben, wobei r und s das folgende System erfüllen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t}(t,y_0) &= \sin t, \quad r(0,y_0) = y_0, \\ \frac{\partial s}{\partial t}(t,y_0) &= 1, \quad s(0,y_0) = \cos y_0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} r(t,y_0) &= -\cos t + y_0 + 1, \\ s(t,y_0) &= t + \cos y_0. \end{aligned}$$

Wir finden nun y_0 so dass $y = y(x,y_0)$ gilt. Also $y = -\cos x + y_0 + 1$. Daraus folgt $y_0 = y + \cos x - 1$. Die gesuchte Lösung ist

$$u(x,y) = x + \cos(y + \cos x - 1).$$

(2) Wir dividieren die Gleichung durch $1 + x^2$ um die Gleichung

$$u_x + \frac{1}{1+x^2} u_y = \frac{2x}{1+x^2} u$$

zu erhalten. Die Charakteristiken sind durch ($\clubsuit$) gegeben, wobei r und s das folgende System erfüllen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t}(t,y_0) &= \frac{1}{1+t^2}, \quad r(0,y_0) = y_0, \\ \frac{\partial s}{\partial t}(t,y_0) &= \frac{2t}{1+t^2} s(t,y_0), \quad s(0,y_0) = f(y_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} r(t,y_0) &= \arctan t + y_0 \\ s(t,y_0) &= f(y_0)\left(1+t^2\right). \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist

$$u(x,y) = \left(1+x^2\right) f(y - \arctan x).$$

(3) Wie oben findet man die Charakteristiken mit Hilfe des Systems

$$\frac{\partial r}{\partial t}(t, y_0) = s(t, y_0), \quad r(0, y_0) = y_0,$$
$$\frac{\partial s}{\partial t}(t, y_0) = r(t, y_0), \quad s(0, y_0) = -y_0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(t, y_0) = r(y, y_0). \tag{$\spadesuit$}$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Ihr charakteristiches Polynom ist $\lambda^2 - 1 = 0$. Seine Nullstellen sind 1 und -1. Deshalb ist die allgemeine Lösung von ($\spadesuit$) durch

$$r(t, y_0) = c_1(y_0)e^t + c_2(y_0)e^{-t}$$

gegeben. Da $s(t, y_0) = \frac{\partial r}{\partial t}(t, y_0)$, gilt

$$s(t, y_0) = c_1(y_0)e^t - c_2(y_0)e^{-t}.$$

Aus der Anfangsbedingungen $r(0, y_0) = y_0$ und $s(0, y_0) = -y_0$ ergibt sich

$$c_1(y_0) = 0 \quad \text{und} \quad c_2(y_0) = y_0.$$

Also

$$r(t, y_0) = y_0 e^{-t}, \quad s(t, y_0) = -y_0 e^{-t}.$$

Die gesuchte Lösung ist

$$u(x, y) = -y.$$

(4) Die Charakteristiken sind

$$t \mapsto \left(t, y_0 e^{\frac{t^2}{2}}, 3t + f(y_0)\right).$$

Daraus ergibt sich

$$u(x, y) = 3x + f\left(y e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

(5) Ähnlichwie früher ist die gesuchte Lösung

$$u(x, y) = -\ln\left(\frac{1}{e} - x\right).$$

Der Definitionsbereich ist die Halbebene

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < \frac{1}{e}\right\}.$$