Musterlösung Serie 3

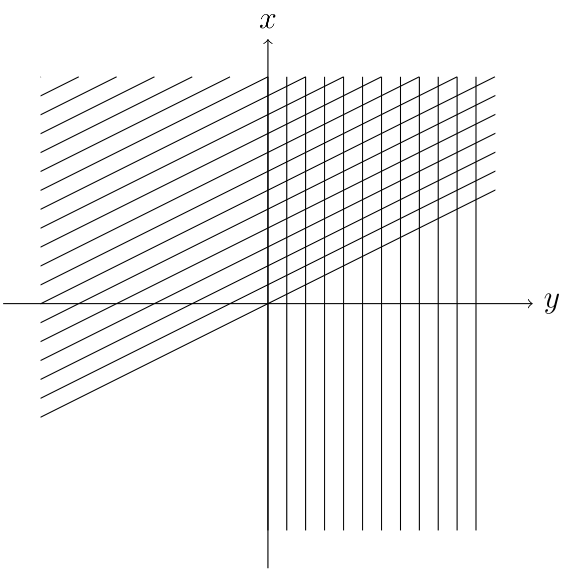
(1) (a) Die Charakteristiken sind

$$\gamma_{y_0}(t) = (t, tu(0, y_0) + y_0, u(0, y_0))\,.$$

Also

$$\gamma_{y_0}(t) = \begin{cases} (t, 2t + y_0, 2) & \text{für } y_0 < 0 \\ (t, y_0, 0) & \text{für } y_0 \geqslant 0. \end{cases}$$

Die Projektionen in die (x, y)-Ebene sind in der folgenden Zeichnung angezeigt.



(b) Zuerst bemerken wir, dass

$$u(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{für } y < x, \\ 0 & \text{für } y > x \end{cases}$$

die Anfangsbedingung erfüllt. In beiden Bereiche

$$\Omega_1 := \{(x, y) \mid y < x\} \quad \text{und} \quad \Omega_2 := \{(x, y) \mid y > x\}$$

ist die Funktion u stetig differenzierbar (sogar konstant) und erfüllt die Burgers-Gleichung. Die Kurve $c(t) = (t, t)$ ist die Schockkurve. Es ist genug zu beweisen, dass c die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\langle (Q_2(c) - Q_1(c), P_1(c) - P_2(c)), \dot{c} \rangle = 0$$

genügt. In unserem Fall gilt

$$\begin{aligned}
&P(x,y,z) = z, \quad Q(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2,\\
&P_1(x,y) = P(x,y,u(x,y)) = u(x,y) = 2, \quad \text{für } (x,y) \in \Omega_1,\\
&P_2(x,y) = P(x,y,u(x,y)) = u(x,y) = 0, \quad \text{für } (x,y) \in \Omega_2,\\
&Q_1(x,y) = Q(x,y,u(x,y)) = \frac{1}{2}u(x,y)^2 = 2, \quad \text{für } (x,y) \in \Omega_1,\\
&Q_2(x,y) = Q(x,y,u(x,y)) = \frac{1}{2}u(x,y)^2 = 0, \quad \text{für } (x,y) \in \Omega_2.
\end{aligned}$$

Man kann die Funktionen P_1, P_2, Q_1, Q_2 zur Schockkurve stetig erweitern. Es folgt

$$\langle (Q_2(c) - Q_1(c), P_1(c) - P_2(c)), \dot{c} \rangle = \langle (-2,2), (1,1) \rangle = 0.$$

Damit ist die Rankine-Hugoniot Bedingung erfüllt.

(c) Die Funktion v ist keine schwache Lösung, weil die Schockkurve $t \mapsto (t, 3t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung nicht erfüllt.

(2) Sei $P_n(x), n \in \{0,1,\ldots\}, x \in [0,\infty)$ die Wahrscheinlichkeit, dass x Minuten nach 8 Uhr genau n Linien besetzt sind. (Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - P_0(60) - P_1(60) - P_2(60) - P_3(60).)$$

Wir betrachten die Funktion

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n.$$

Aus dem Kapitel 7 im Skript folgt es, dass G eine Lösung ger Gleichung

$$u_x + \beta(y-1)u_y = \alpha(y-1)u,$$

mit der Anfangsbedingung $u(0,y) = 1$ ist, wobei (in unserem Fall) $\alpha = \frac{1}{10}$ (1 Anruf pro 10 Minuten) und $\beta = \frac{1}{15} (= \frac{1}{15\,\mathrm{min}})$. Diese Gleichung lässt sich mit der Methode der Charakteristiken lösen. Die Charakteristiken sind

$$\gamma_{y_0}(t) = (t, r(t, y_0, s(t, y_0))),$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} r(t,y_0) = \beta(r(t,y_0) - 1), \quad r(0,y_0) = y_0,\\
&\frac{d}{dt} s(t,y_0) = \alpha(r(t,y_0) - 1)s(t,y_0), \quad s(0,y_0) = 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
r(t,y_0) &= 1 + (y_0 - 1)e^{\beta t},\\
s(t,y_0) &= e^{\frac{\alpha}{\beta}(y_0-1)\left(e^{\beta t}-1\right)}.
\end{aligned}$$

Also

$$G(x,y) = e^{\frac{\alpha}{\beta}(y-1)\left(1-e^{-\beta x}\right)}.$$

Es erhält sich

$$G(60, y) \approx e^{1.4725(y-1)}.$$

Nun finden wir

$$\begin{aligned} P_0 &= G(60,0) \approx 0.2294 \\ P_1 &= G_y(60,0) \approx 0.3377 \\ P_2 &= \frac{1}{2} G_{yy}(60,0) \approx 0.2487 \\ P_3 &= \frac{1}{6} G_{yyy}(60,0) \approx 0.1221. \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist ungefähr 6.22%.

(3) Das Hauptsymbol von der Gleichung ist

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}.$$

Da

$$\det A = -xy \begin{cases} < 0 & \text{für } xy > 0, \\ > 0 & \text{für } xy < 0, \end{cases}$$

ist die Gleichung elliptisch im Bereich

$$\{(x, y) \mid xy < 0\}$$

und hyperbolisch im Bereich

$$\{(x, y) \mid xy > 0\}.$$

(4) Die Determinante vom Hauptsymbol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - q(y) \end{bmatrix}$$

ist

$$\det A = -q(y).$$

Daraus folgt, dass die Gleichung elliptisch, parabolisch und hyperbolisch in den Bereiche

$$\{(x, y) \mid y < -1\}, \quad \{(x, y) \mid |y| < 1\} \quad \text{und} \quad \{(x, y) \mid y > 1\}$$

ist (in dieser Reihenfolge).