Musterlösung Serie 4

(1) Da die Determinante des Hauptsymbols

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$$

gleich 0 ist, ist die gegebene Gleichung parabolisch. Wir suchen einen Variablenwechsel

$$\Psi(x,y) = (s(x,y), t(x,y)),$$

so dass

$$\begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also müssen die Funktionen s und t das folgende System erfüllen

$$\begin{aligned} &s_x t_x + x s_x t_y + x s_y t_x + x^2 s_y t_y = 0, \\ &t_x^2 + 2x t_x t_y + x^2 t_y^2 = 0. \end{aligned}$$

Es ist gleichwertig mit dem System

$$\begin{aligned} &(s_x + x s_y)(t_x + x t_y) = 0, \\ &(t_x + x t_y)^2 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass (s,t) eine Lösung des Systems ist, wenn

$$(\diamondsuit) \qquad t_x + x t_y = 0$$

gilt (s kann beliebig sein). Mit Hilfe der Methode der Charakteristiken löst man die PDG ($\diamondsuit$)

$$t(x,y) = f\left(y - \frac{x^2}{2}\right),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist. Nun haben wir grosse Freicheit f und s zu wählen. Wir müssen nur beachten, dass die matrix

$$(\blacklozenge) \qquad \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix}$$

invertierbar ist. Zum Beispiel nehmen wir

$$s(x,y) = x, \quad t(x,y) = y - \frac{x^2}{2}.$$

(Es lässt sich einfach überprüfen, dass die Matrix (♦) für diese Wahl von s und f tatsächlich invertierbar ist.) Sei v die Funktion definiert durch $v(s,t) = u(x,y)$. Es folgt durch Kettenregel

$$\begin{aligned}
u_x &= v_s - xv_t,\\
u_y &= v_t,\\
u_{xx} &= v_{ss} - 2xv_{st} + x^2 v_{tt} - v_t,\\
u_{xy} &= v_{st} - xv_{tt},\\
u_{yy} &= v_{tt}.
\end{aligned}$$

Nach der Ersetzung erhält man

$$0 = u_{xx} + 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} = v_{ss} - v_t.$$

(2) (a) Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}
u_t - \alpha u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi(\lambda)) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi(\lambda))\\
&= \phi_\lambda(\lambda)\lambda_t - \alpha \frac{\partial}{\partial x}(\phi_\lambda(\lambda)\lambda_x)\\
&= \phi_\lambda(\lambda)\lambda_t - \alpha\phi_{\lambda\lambda}(\lambda)\lambda_x^2 - \alpha\phi_\lambda(\lambda)\lambda_{xx}\\
&= -\phi_\lambda(\lambda)\frac{x}{2t\sqrt{2\alpha t}} - \alpha\phi_{\lambda\lambda}(\lambda)\frac{1}{2\alpha t}\\
&= -\frac{1}{2t}\left(\phi_{\lambda\lambda}(\lambda) + \frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\phi_\lambda(\lambda)\right)\\
&= -\frac{1}{2t}\left(\phi_{\lambda\lambda}(\lambda) + \lambda\phi_\lambda(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

(b) Die allgemeine Lösung der GDG

$$\phi_{\lambda\lambda} + \lambda\phi_\lambda = 0$$

ist

$$\phi(\lambda) = c_1 \int_0^\lambda e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr + c_2.$$

Für $c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ und $c_2 = 0$ erhält man

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\lambda}^\lambda e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = \operatorname{erf}(\lambda).$$

(c) Teile (a) und (b) implizieren, dass $\operatorname{erf}(\lambda(x,t))$ eine Lösung der PDG

(♣) $$u_t - u_{xx} = 0$$

ist. Da die Gleichung linear und homogen ist, sind skalare Vielfache und Ableitungen von $\operatorname{erf}(\lambda(x,t))$ auch Lösungen von (♣). Es ist genug zu bemerken, dass

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{erf}(\lambda(x,t))).$$

(3) Nach der Vorlesung ist die Lösung des Differentialgleichungsproblem durch

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-12n^2 t} \sin(nx)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \sin(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) - \sin(nx)\cos(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) - \frac{1}{2}\sin((n-2)x) - \frac{1}{2}\sin((n+2)x) dx.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
c_n = &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\cos((n-2)x)}{2(n-2)} + \frac{\cos((n+2)x)}{2(n+2)} \right) \Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi} \frac{4}{n(n-2)(n+2)},
\end{aligned}$$

für $n \neq 2$, und

$$c_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) - \frac{1}{2}\sin(4x) dx = 0.$$