Musterlösung Serie 5

(1) Zunächst bringen wir die Wellengleichung in die kanonische Gestalt mit Hilfe des Variablenwechsels

$$y = x + 3t, \quad s = x - 3t.$$

Sei $v(y, s) = u(x, t)$. In den neuen Koordianten hat die Gleichung die Form

$$-36v_{ys} = 0.$$

Nach Integration bezüglich y und dann bezüglich s erhält man

$$v(y, s) = \int_0^s c_1(\tau)d\tau + c_2(y).$$

Also

$$v(y, s) = F(y) + G(s)$$

für beliebigen Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$u(x, t) = F(x + 3t) + G(x - 3t).$$

Nun finden wir F und G, so dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Solche Funktionen F und G müssen das folgende System erfüllen

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= x^2, \\ F'(x) - G'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Wir integrieren die zweite Gleichung des Systems bezüglich x

$$F(x) - G(x) = x^2 + c.$$

Nun bekommen wir

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + \frac{c}{2}, \\ G(x) &= -\frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Also

$$u(x, t) = (x + 3t)^2.$$

(2) Die Laplace-Transformation verwandelt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = \sin(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

in die algebraische gleichung

$$s^2X(s) - s \cdot 0 - 1 + sX(s) - 0 + X(s) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

wobei $X = \mathcal{L}[x]$. Diese Gleichung lässt sich einfach lösen

$$X(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+s+1)}.$$

Wir sollen noch nur die inverse Laplacetransformierte von X finden. Zunächst finden wir die Partialbruchzerlegung fon $X(s)$

$$\frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+s+1} = \frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+s+1)}.$$

Die letzte Gleichung gilt dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} a+c &= 0, \\ a+b+d &= 1, \\ a+b+c &= 0, \\ b+d &= 2. \end{aligned}$$

Also, $a=-1, b=0, c=1, d=2$ und

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{s}{s^2+1} + \frac{s+2}{s^2+s+1} \\ &= -\mathcal{L}[\cos(t)] + \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= -\mathcal{L}[\cos(t)] + \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= -\mathcal{L}[\cos(t)] + \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + \sqrt{3}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[-\cos(t) + e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x(t) = -\cos(t) + e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

(3) Nach der Formel von Kirchhoff ist die Lösung durch

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t} f(x+y)dS(y)\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t} g(x+y)dS(y)$$

gegeben, wobei

$$S_t = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = t\right\}$$

und

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\,\text{Fläche}(S_t \cap B_1(-x)),$$

wobei

$$B_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x| \leqslant r \right\}.$$

Man sieht gleich, dass $u(x, y) = 0$ für $||x| - t| > 1$ (denn es gilt dann $S_t \cap B_1(-x)) = \emptyset$). Falls $|x| < 1$ und $t < 1 - |x|$ gilt

$$S_t \cap B_1(-x) = S_t.$$

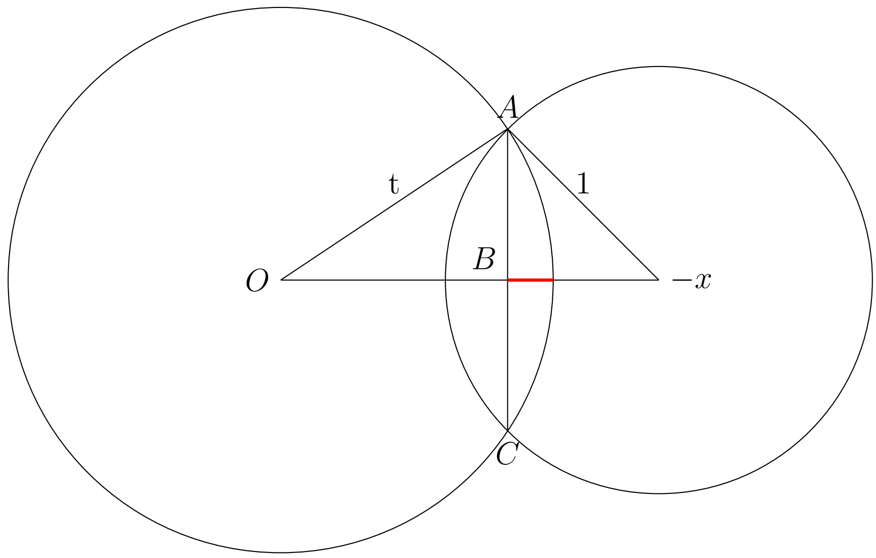
Für $||x| - t| \leqslant 1$ ist $S_t \cap B_1(-x)$ eine Kugelkalotte. Sei $h(x, t)$ die Höhe dieser Kugelkalotte. Ihr Fläche ist

$$2\pi t h(x, t).$$

Also

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } ||x| - t| > 1, \\ t & \text{für } (0 \leqslant)\, t < 1 - |x|, \\ \frac{h(x,t)}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun errechnen wir die Höhe $h(x, t)$. (Sie ist mit der roten Farbe in der Zeichnung gezeigt.)



Der Satz des Pythagoras (für Dreiecke AOB und $A(-x)B$) impliziert

$$t^2 - OB^2 = 1 - (|x| - OB)^2.$$

Daraus folgt

$$OB = \frac{t^2 + |x|^2 - 1}{2\,|x|}.$$

Da $h(x, t) = t - OB$, erhält man

$$h(x,t) = \frac{1 - (|x| - t)^2}{2\,|x|}.$$

(4) Sei $u : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, t) \mapsto u(x_1, x_2, t)$ die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

die die Anfangsbedingungen

$$u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2), \quad u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$$

erfüllt. Dann ist die Funktion

$$v : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3, t) \mapsto u(x_1, x_2, t)$$

die Lösung der **drei**-dimensionalen Wellengleichung

$$v_{tt} - \Delta v = v_{tt} - v_{x_1x_1} - v_{x_2x_2} - v_{x_3x_3} = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, x_3, 0) &= f(x_1, x_2) =: F(x_1, x_2, x_3), \\ v_t(x_1, x_2, x_3, 0) &= g(x_1, x_2) =: G(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Man darf jetzt die Formel von Kirchhof anwenden (wir sind in 3D)

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} F(x+y)dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} G(x+y)dS(y).$$

Die Funktionen $F(x_1, x_2, x_3)$ und $G(x_1, x_2, x_3)$ haben die Eigenschaft, dass sie von der Koordinate x_3 unabhängig sind. Deshalb kann man statt Integrierung auf der Kugel auf der oberen Halbkugel S_t^+ integrieren (und natürlich mit 2 multiplizieren)

$$u(x_1, x_2, t) = v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S_t^+} F(x+y)dS(y) \right) + \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S_t^+} G(x+y)dS(y), \; x \in \mathbb{R}^3.$$

Die Halbkugel S_t^+ lässt sich als Graph parametrisieren

$$D_t(0) \ni (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2} \right).$$

Also

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{D_t(0)} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dA(y) \right) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{D_t(0)} \frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dA(y), \; x \in \mathbb{R}^2.$$

Um die gesuchte Formel zu bekommen, ist es jetzt genug nur den Variablenwechsel $z = x + y$ zu machen.