Musterlösung Serie 7

(1) Die charakteristische Kurve, die durch den Punkt $(0, y_0)$ läuft, ist

$$t \mapsto (t, r_{y_0}(t), s_{y_0}(t)),$$

wobei (r_{y_0}, s_{y_0}) die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} r'_{y_0}(t) &= 1, \quad r_{y_0}(0) = y_0 \\ s'_{y_0}(t) &= s_{y_0}^2, \quad s_{y_0}(0) = 1 \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt, dass die Charakteristiken durch

$$t \mapsto \left(t + y_0, \frac{1}{1-t}\right), \quad y_0 \in \mathbb{R},\ t \neq 1$$

gegeben sind. Also ist die Lösung der PDG

$$u(x, y) = \frac{1}{1-x}.$$

Sie ist auf der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$$

wohl definiert.

(2) Die charakteristische Kurve, die durch den Punkt (x_0, x_0) läuft, ist

$$\gamma_{x_0}(t) = (g_{x_0}(t), r_{x_0}(t), s_{x_0}(t)),$$

wobei $(g_{x_0}, r_{x_0}, s_{x_0})$ die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} q'_{x_0}(t) &= q_{x_0}(t), \quad q_{x_0}(0) = x_0, \\ r'_{x_0}(t) &= r_{x_0}(t), \quad r_{x_0}(0) = x_0, \\ s'_{x_0}(t) &= s_{x_0}(t) + q_{x_0}(t) r_{x_0}(t), \quad q_{x_0}(0) = x_0^2 \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt

$$\gamma_{x_0}(t) = \left(x_0 e^t, x_0 e^{-t}, 2x_0^2 e^t - x_0^2\right).$$

Um die Lösung $u(x, y)$ zu finden, lösen wir

$$x = x_0 e^t, \quad y = x_0 e^{-t}$$

bezüglich x_0 und e^t. Es erhält sich

$$x_0 = \sqrt{xy}, \quad e^t = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Also

$$u(x,y) = 2x_0^2 e^t - x_0^2 = 2xy\sqrt{\frac{x}{y}} - xy = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - xy.$$

(3) Zunächst bringen wir die PDG in kanonische Gestalt. Das Verfahren ist in Proposition 8.8 auf der Seite 35 in der Zusammenfassung der Vorlesung beschrieben. Man findet einen Variablenwechsel

$$(x,y) \mapsto (s(x,y), t(x,y)),$$

so dass t der PDG

$$(\clubsuit) \qquad t_x - 3t_y = 0$$

genügt und so dass

$$(\spadesuit) \qquad \det \begin{bmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (**??**) ist

$$t(x,y) = f(y + 3x),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist. (Diese Lösung kann man mit Hilfe der Methode der Charakteristiken finden.) Wir nehmen, zum Beispiel, $t(x,y) = y + 3x$ (also $f(\tau) = \tau$) und $s(x,y) = x$. Es lässt sich einfach überprufen, dass die Bedingung (**??**) erfüllt ist. Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch $v(s,t) = u(x,y)$ definiert ist. Die Funktion v erfüllt

$$v_{ss} = u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2 = s(t - 3s)^2 = st^2 - 6s^2t + 9s^3.$$

Man kann die Gleichung

$$v_{ss} = st^2 - 6s^2t + 9s^3$$

als eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Parameter t betrachten. Ihre allgemeine Lösung ist

$$v(s,t) = \frac{s^3t^2}{6} - \frac{s^4t}{2} + \frac{9}{20}s^5 + c_1(t) + sc_2(t),$$

wobei $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x^3(3x+y)^2}{6} - \frac{x^4(3x+y)}{2} + \frac{9}{20}x^5 + c_1(3x+y) + xc_2(3x+y) \\ &= \frac{9}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{6}x^3y^2 + c_1(3x+y) + xc_2(3x+y). \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte allgemeine Lösung.

(4) wir bringen zunächst die PDG in kanonische Gestalt. Die PDG ist hyperbolisch mit dem Hauptsymbol

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -16 \end{bmatrix}.$$

Wie in Aufgabe 3 Serie 3 vrewenden wir einen Variablenwechsel

$$(x,y) \mapsto (s(x,y), t(x,y)),$$

so dass
$$\begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ? \\ ? & 0 \end{bmatrix}$$
gilt. Also müssen die Funktionen s und t Lösungen der PDG
$$w_x^2 + 6w_x w_y - 16w_y^2 = 0$$
sein. Diese Gleichung lässt sich faktorisieren
$$(w_x + 8w_y)(w_x - 2w_y) = 0.$$
Wir nehmen für s und t Lösungen von
$$\begin{aligned} s_x - 2s_y &= 0 \\ t_x + 8t_y &= 0 \end{aligned}$$
in dieser Reihenfolge. Die allgemeine Lösungen dieser Gleichungen sind
$$\begin{aligned} s(x,y) &= f(2x+y), \\ t(x,y) &= g(y-8x), \end{aligned}$$
wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen sind. Wir wählen $s = 2x+y$ und $t = y-8x$. (Diese Wahl ist nicht eindeutig.) In den Koordinaten s, t hat die PDG die Form
$$-100v_{st} = 0.$$
Daraus folgt
$$v(s,t) = c_1(s) + c_2(t).$$
Nun setzen wir $u(x,y) = v(s,t)$, $s = 2x+y$ und $t = y-8x$ ein und bekommen die allgemeine Lösung der PDG
$$u(x,y) = c_1(2x+y) + c_2(y-8x).$$
Wir berechnen nun die Funktionen $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus den Bedingungen
$$u(-x, 2x) = x, \quad u(x,0) = \sin(2x).$$
Es erhält sich
$$\begin{aligned} c_1(0) + c_2(10x) &= x, \\ c_1(2x) + c_2(-8x) &= \sin(2x). \end{aligned}$$
Daraus folgt
$$c_1(\tau) = \frac{2\tau}{5} + \sin(\tau) \quad , c_2(\tau) = \frac{\tau}{10}.$$
Die gesuchte Lösung ist
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{4x+2y}{5} + \sin(2x+y) + \frac{y-8x}{10} \\ &= \frac{y}{2} + \sin(2x+y). \end{aligned}$$

(5) Der Variablenwechsel $s = y - 4x, t = y$ bringt die PDG in die Gestalt

$$-16v_{st} - 4v_s = 0.$$

Wir dividieren durch -16

$$v_{st} + \frac{1}{4}v_s = 0$$

und setzen $w := v_s$

$$(\diamondsuit) \qquad w_t + \frac{1}{4}w = 0.$$

Man kann die Gleichung (**??**) als gewöhnliche DG mit Parameter s betrachten. Ihre allgemeine Lösung ist

$$w(s,t) = c_1(s)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Daraus folgt

$$v(s,t) = c_2(s)e^{-\frac{1}{4}t} + c_3(t).$$

Wir setzen $u(x,y) = v(s,t), s = y - 4x, t = y$ ein:

$$u(x,y) = c_2(y-4x)e^{-\frac{1}{4}y} + c_3(y).$$

Aus der Nebenbedingungen berechnet man die Funktionen c_2 und c_3

$$c_2(\tau) = -\tau + c, \quad c_3(\tau) = \left(\frac{\tau}{2} - c\right)e^{-\frac{\tau}{4}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die gesuchte Lösung ist

$$u(x,y) = \left(4x - \frac{1}{2}y\right)e^{-\frac{1}{4}y}.$$

(6) Der Variablenwechsel $s = y^3 + 3x, t = y^3 - 3x$ bringt die PDG in die Gestalt

$$-18y^5 v_{st} = 0.$$

Daraus folgt

$$v(s,t) = f(s) + g(t),$$

für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die gesuchte Lösung ist

$$u(x,y) = f(y^3 + 3x) + g(y^3 - 3x).$$

(7) Nach der Proposition 10.1 ist die Lösung der PDG

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2}{3}t} \sin\left(\frac{n}{3}x\right),$$

wobei

$$c_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} (3\sin(x) - \sin(2x))\sin\left(\frac{n}{3}x\right)dx = \begin{cases} 0 & n \notin \{3,6\}, \\ 3 & n = 3, \\ -1 & n = 6. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$u(x,t) = 3e^{-3t}\sin(x) - e^{-12t}\sin(2x).$$

(8) Nach dem Satz 11.3 ist die Lösung der PDG

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt)) \sin(nx),$$

wobei

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \frac{3}{4} & n=1, \\ -\frac{1}{4} & n=3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\cos(t)\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2t)\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(3t)\sin(3x).$$

(9) Nach der Formel von d'Alembert (Satz 11.5 in der Zusammenfassung)ist die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(x+3t+x-3t) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin\tau d\tau = x + \frac{\sin x \sin(3t)}{3}.$$

(10) Wir verwenden die Formel von Kirchhoff (Satz 11.14 in der Zusammenfassung). Die Lösung ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} 0 d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} |y|^2 d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(|x|^2 + t^2 + 2t(x_1\cos\theta\sin\varphi + x_2\sin\theta\sin\varphi + x_3\cos\varphi)\right) t^2 \sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= t\left(|x|^2 + t^2\right). \end{aligned}$$

Wir haben die Parametrisierung

$$(\theta,\varphi) \mapsto (x_1 + t\cos\theta\sin\varphi, x_2 + t\sin\theta\sin\varphi, x_3 + t\cos\varphi), \quad \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi]$$

für $S(x,t)$ benutzt.

(11) Da $u^4 + v^4$ harmonisch ist folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\left(u^4 + v^4\right) \\ &= 2u^2\Delta u^2 + 2\left|\nabla u^2\right|^2 + 2v^2\Delta v^2 + 2\left|\nabla v^2\right|^2 \\ &= 4u^2|\nabla u|^2 + 8u^2|\nabla u|^2 + 4v^2|\nabla v|^2 + 8v^2|\nabla v|^2 \\ &= 12u^2|\nabla u|^2 + 12v^2|\nabla v|^2 \end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass $\Delta u^2 = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2$. Also ist $|\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = 0$ und somit sind u und v konstant.

(12) Seien $a, b \in (0,R)$, so dass $a < b$. Die Restriktion von u auf

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant b\right\}$$

hat (nach dem Maximum Prinzip) das Maximum auf

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0b\right\}$$

und keine lokale Maxima in

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < b\right\}.$$

Daraus folgt

$$\max_{x^2+y^2<b} u(x,y) < \max_{x^2+y^2=b} u(x,y).$$

Insbesondere

$$\max_{x^2+y^2=a} u(x,y) < \max_{x^2+y^2=b} u(x,y).$$

Das heisst

$$M(a) < M(b)$$

und somit ist M monoton steigend.

(13) Sei u die Lösung ges Dirichletproblems. Beide Funktionen u und

$$f : (x_1, \ldots, x_5) \mapsto x_3$$

sind harmonisch und erfüllen die selbe Grenzbedingung. Nach dem Satz 13.16 in der Zusammenfassung müssen die Beide übereinstimmen. Also ist gie gesuchte Lösung

$$u(x_1, \ldots, x_5) = x_3.$$

(14) Nach Poisson-Formel

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{0} f(a\cos(2\pi-\theta), a\sin(2\pi-\theta))\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos(2\pi-\theta)+x^2}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\theta, -a\sin\theta)\frac{a^2-x^2}{a^2+2xa\cos\theta+x^2}d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(15) Die Green'sche Funktion $G_a(x,y)$ für den Laplaceoperator auf der Kreisscheibe $B(0,a)$ ist durch

$$G_a(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{|y|\left|x-\frac{a^2}{|y|^2}y\right|}{a|x-y|}\right) & \text{für } x \neq y \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{|x|}\right) & \text{für } y=0,\ x\neq 0 \end{cases}$$

gegeben. Wir nehmen an $x \neq y \neq 0$. Es gilt

$$\left|x - \frac{a^2}{|y|^2}y\right| = \frac{a}{|y|}|x-y|, \quad \text{für } x \in S(0,a).$$

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} G_a(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln|y| + \ln\left|x - \frac{a^2}{|y|^2}y\right| - \ln a - \ln|x-y|\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\left|x-\frac{a^2}{|y|^2}y\right|}\frac{x_1 - \frac{a^2}{|y|^2}y_1}{\left|x-\frac{a^2}{|y|^2}y\right|} - \frac{1}{|x-y|}\frac{x_1-y_1}{|x-y|}\right)\\
&\overset{x\in S(0,a)}{=\!=\!=} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1 - \frac{a^2}{|y|^2}y_1}{\frac{a^2}{|y|^2}|x-y|^2} - \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\right)\\
&= \frac{x_1}{2\pi a^2}\frac{|y|^2-a^2}{|x-y|^2}.
\end{aligned}$$

Ähnlich

$$\partial_{x_2} G_a(x,y) = \frac{x_2}{2\pi a^2}\frac{|y|^2-a^2}{|x-y|^2}, \quad \text{für } x \in S(0,a).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\partial_n G_a(x,y) =& \frac{x_1}{a}\partial_{x_1}G_a(x,y) + \frac{x_2}{a}\partial_{x_2}G_a(x,y)\\
=& \frac{x_1^2+x_2^2}{2\pi a^3}\frac{|y|^2-a^2}{|x-y|^2}\\
=& -\frac{1}{2\pi}\frac{a^2-|y|^2}{a|x-y|^2}.
\end{aligned}$$

(16) Die Green'sche Funktion ist durch

$$G(x,y) := \Gamma(x,y) - h(x,y), \quad x \neq y$$

definiert, wobei

$$\Gamma(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, \quad x \neq y$$

und $h(\cdot, y)$ ist die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x) = 0, \quad \text{für } x \in \Omega,\\
&u(x) = \Gamma(x,y), \quad \text{für } x \in \partial\Omega
\end{aligned}$$

(Schauen Sie Definition 13.27 an). Da Γ symmetrisch ist und Dirichletproblem eindeutige Lösung hat, ist $h(x,y)$ symmetrisch. Deshalb ist G auch symmetrisch.