Serie 3

(1) Wir betrachten die Burgers-Gleichung

$$u_x + uu_y = 0$$

in konservativer Form

$$\frac{d}{dx}u + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } y < 0, \\ 0 & \text{für } y \geqslant 0. \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die Projektionen der Charakteristischen Kurven in die (x, y)-Ebene.

(b) Beweisen Sie, dass

$$u(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } y < x, \\ 0 & \text{für } y > x \end{cases}$$

eine schwache Lösung ist.

(c) Ist

$$v(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } y < 3x, \\ 0 & \text{für } y > 3x \end{cases}$$

eine schwache Lösung?

(2) Lösen Sie Aufgabe 7.5 auf der Seite 31 im Skript:

Ein Callcenter geht um 8h morgens in Betrieb. Es erhält durchschnittlich einen Anruf alle zehn Minuten, eine Kundenabwicklung dauert in der Regel eine Viertelstunde. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass um 9h mehr als 3 Leitungen besetzt sind?

Hinweis: arbeiten Sie den Kapitel 7 (insbesondere den Paragraf 7.3) durch.

(3) In welchem Bereich ist die Gleichung

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$$

(a) elliptisch?

(b) hyperbolisch?

(4) Finden Sie die Bereiche, in denen die Gleichung

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - q(y))u_{yy} = 0$$

hyperbolisch, parabolisch und elliptisch ist. Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$q(y) = \begin{cases} -1 & \text{für } y < -1, \\ 0 & \text{für } |y| \leqslant 1, \\ 1 & \text{für } y > 1 \end{cases}$$

gegeben.

Abgabetermin: Bitte legen Sie Ihre Lösungen bis spätestens Freitag, 30.10.2015 in das Fächlein Ihres Assistenten in HG F28.