Serie 4

(1) Bringen sie die PDG
$$u_{xx} + 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$$
in die kanonische Gestalt.

(2) Wir betrachten die Wärmleitungsgleichung

(♣) $$u_t = \alpha u_{xx}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

(a) Sei $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$. Zeigen Sie, dass
$$u(x,t) = \phi(\lambda(x,t))$$
genau dann eine Lösung von (♣) ist, wenn $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der GDG

(♠) $$\phi_{\lambda\lambda} + \lambda \phi_\lambda = 0$$

ist.

(b) Lösen Sie die Gleichung (♠) und bemerken Sie, dass die Fehlerfunktion
$$\mathrm{erf}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$
auch eine Lösung von ihr ist.

(c) Beweisen Sie, dass
$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$$
eine Lösung von (♣) ist. Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von $\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(\lambda(x,t))$ bezüglich x.

(3) Finden Sie die Lösung der PDG
$$u_t = 12u_{xx}$$
im Bereich $0 < x < \pi, t > 0$, die die folgenden Bedingungen erfüllt
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t > 0$$
$$u(0,x) = \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

Abgabetermin: Bitte legen Sie Ihre Lösungen bis spätestens Freitag, 13.11.2015 in das Fächlein Ihres Assistenten in HG F28.