Serie 6

(1) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch ist, wenn es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(x, y) = \mathrm{Re}(h(x + iy))$$

gilt.

(2) Sei $u(x, y)$ die harmonische Funktion auf

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 36\right\},$$

die

$$u(x, y) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für $(x, y) \in \Omega$

$$u(x, y) < \min\{x, 0\}$$

gilt.

(b) Berechnen Sie $u(0, 0)$ mit Hilfe des Mittelwertprinzips.

(c) Berechnen Sie $u(0, y)$ für $0 \leqslant y < 6$, indem Sie die Poisson-Formel verwenden.

(d) Finden Sie u mit der Methode der Separation der Variablen.

(3) Beweisen Sie, dass jede nichtnegative harmonische Funktion u auf der Kreisscheibe vom Radius a der Harnack-Ungleichung

$$\frac{a - |z|}{a + |z|} u(0, 0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{a + |z|}{a - |z|} u(0, 0), \quad z \in \mathbb{R}^2,\ |z| < a$$

genügt.

Abgabetermin: Bitte legen Sie Ihre Lösungen bis spätestens Freitag, 11.12.2015 in das Fächlein Ihres Assistenten in HG F28.