Serie 7

(1) Lösen Sie die Differentialgleichung $u_x + u_y = u^2$ unter der Nebenbedingung $u(0, y) = 1$. Auf welchem Bereich ist die Lösung wohldefiniert?

(2) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$xu_x - yu_y = u + xy, \quad u(x, x) = x^2$$

im Bereich $x, y > 0$.

(3) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2.$$

(4) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0,$$

die die Bedingungen

$$u(-x, 2x) = x, \quad u(x, 0) = \sin(2x)$$

erfüllt.

(5) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0,$$

die die Bedingungen

$$u(x, 8x) = 0, \quad u_x(x, 8x) = 4e^{-2x}$$

erfüllt.

(6) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^5 u_{xx} - yu_{yy} + 2u_y = 0$$

im Bereich $y > 0$.

(7) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&u_t - 3u_{xx} = 0, \\
&u(0, t) = 0, \\
&u(3\pi, t) = 0, \\
&u(x, 0) = 3 \sin x - \sin(2x), \quad x \in [0, 3\pi], \quad t > 0.
\end{aligned}$$

(8) Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ &u(x,0) = \sin^3 x, \\ &u_t(x,0) = \sin(2x), \quad x \in [0,\pi], \quad t > 0. \end{aligned}$$

(9) Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u(x,0) = x, \\ &u_t(x,0) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(10) Finden Sie die Lösung der drei-dimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t \in [0,\infty)$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = |x|^2 .$$

(11) Seien u, v und $u^4 + v^4$ harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass u und v konstant sind.

(12) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine nichtkonstante harmonische Funktion auf der Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < R\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$M : (0,R) \to \mathbb{R} \,:\, r \mapsto \max_{x^2+y^2=r^2} u(x,y)$$

monoton steigend ist.

(13) Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ die Funktion $(x_1, \ldots, x_5) \mapsto x_3$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } B(0,a) \subset \mathbb{R}^5 \\ u = f & \text{auf } S(0,a) = \partial B(0,a). \end{cases}$$

(14) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die $f(x,-y) = -f(x,y)$ erfüllt. Sei u die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } B(0,a) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = f & \text{auf } S(0,a) = \partial B(0,a) \end{cases}$$

für $a \in (0,\infty)$. Finden Sie $u(x,0)$ für $x \in (-a,a)$.

(15) Sei $G_a(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ die Green'sche Funktion für den Laplaceoperator auf der Kreisscheibe $\Omega = B(0,a) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$\partial_n G_a(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{a^2 - |y|^2}{a\,|x-y|^2}, \quad x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$$

(16) Sei $G(x,y)$ die Green'sche Funktion für einen Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass G symmetrisch ist. (Das heisst $G(x,y) = G(y,x)$ für $x, y \in \Omega$.)