D-ITET. D-MATL, RW Lineare Algebra HS 15
Dr. V. Gradinaru
D. Devaud

Online-Test 2

Einsendeschluss: Mittwoch, den 23.12.2015 18:00 Uhr

Dieser Test dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Übung für die Prüfung. Es werden auch Lösungen veröffentlicht werden.

---

1. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

√ (a) $x = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$,

(b) $x = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

(c) $x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$,

(d) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wählen wir die Givens-Rotation $Q^\top = U_{23}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ mit $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten $Q^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R$. Mit $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ wird $d = Q^\top c = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Schliesslich löst man $R_0 x = d_0$ durch Rückwärtseinsetzen und erhält $x = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$. Dabei sind R_0 und d_0 die ersten zwei Zeilen von R und d.

2. Ist A eine diagonalisierbare Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

√ (a) Richtig. (b) Falsch.

Da A diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen T, D, so dass $A = TDT^{-1}$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

$$\det(A) = \det(TDT^{-1}) = \det(T)\det(D)\det(T^{-1}) = \det(D),$$

also stimmt die Aussage.

3. Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

√ (a) Richtig. (b) Falsch.

Da A symmetrisch ist, folgt die Behauptung aus Satz 7.7.

4. Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

(a) Richtig √ (b) Falsch

Eine orthogonale Matrix A besitzt immer die Inverse A^T, da per Definition $A^TA = I$ gilt und (für quadratische Matrizen) aus $BA = I$ immer $B = A^{-1}$ folgt.

5. Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2.

√ (a) Richtig. (b) Falsch.

Es gilt

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x,$$

also ist x auch Eigenvektor von A^2.

6. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

sind diagonalisierbar?

√ (a) A_1 (c) A_3

√ (b) A_2 (d) Keine.

Wir berechnen die Eigenwerte von A_1:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(A_1 - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 9) + 1(-\lambda + 6) - 2(3 + 2\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 9\lambda + (-\lambda) + 6 - 6 - 4\lambda) = -\lambda^3 - 14\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 14) \end{aligned}$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{14}i$, $\lambda_3 = -\sqrt{14}i$. Damit hat jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1. Die Matrix ist also einfach und damit diagonalisierbar.

Die Matrix A_2 ist reell und symmetrisch. Nach Satz 7.8 i) ist A_2 diagonalisierbar.

Wir berechnen die Eigenwerte von A_3:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(A_3 - \lambda I) = -\lambda\left((1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 3\right) - 1 \cdot 2(-1 - \lambda) + 1(-2) \\ &= \lambda - \lambda^3 - 3\lambda + 2 + 2\lambda - 2 = -\lambda^3 \end{aligned}$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also ist 0 ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3.

Um zu sehen, ob die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen übereinstimmt, berechnen wir die Eigenvektoren:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow x_3$ freier Parameter, $x_2 = 0, x_1 = x_3$

Also ist die geometrische Vielfachheit 1 und die Matrix damit nicht diagonalisierbar.

7. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$Ax - c = r$$

mit

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \text{Rang}A = 2.$$

Dann haben die Normalgleichungen

$$A^T Ax = A^T c$$

eine eindeutige Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Normalgleichungen haben eine eindeutige Lösung, falls die Matrix A maximalen Spaltenrang hat, also in diesem Fall $\text{Rang}A = 3$. Es gilt jedoch $\text{Rang}A = 2$.

8. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $[-1, 2]^T$. Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist:

(a) $[\frac{3}{2}, 0]^T$

(b) $[-1, 2]^T$

√ (c) $[0, -5]^T$

(d) $[-2, 0]^T$

Wenn Basisvektoren $b^{(1)}, ..., b^{(n)}$ im $\mathbb{R}^n$ und Koordinatenvektor $[k_1, ..., k_n]^T$ eines Vektors k gegeben sind, so bedeutet das, dass

$$k = k_1 b^{(1)} + ... + k_n b^{(n)}.$$

Hier sind wir im $\mathbb{R}^2$ und haben als Basis die beiden Vektoren $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Der Vektor mit Koordinaten $[-1, 2]^T$ bezüglich dieser Basis ist also

$$-1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix},$$

hat also bezüglich der Standardbasis die Koordinaten $[0, -5]^T$.

9. Wir betrachten eine Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix S ist dann gegeben durch:

(a) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

√ (c) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wir haben $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und da $m < n$, erhalten wir $S = [\hat{S} \mid 0]$ mit $\hat{S} = \operatorname{diag}(s_1, s_2)$, wobei s_i^2 die Eigenwerte von AA^T sind. Wir berechnen die Eigenwerte von AA^T:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} &\det(AA^T - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{pmatrix} \\ =&(11-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 22\lambda + 120 \\ =&(\lambda - 10)(\lambda - 12). \end{aligned}$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 12$ und $\lambda_2 = 10$ und es folgt

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm. Es sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a) Für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\left(x, A^T y\right) = (A\,x, y)$.

√ (b) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $(A\,x, A\,y) = (x, y)$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

√ (c) Wenn gilt $A^T = A^{-1}$, dann folgt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

√ (d) Es sei B eine weitere reelle $n \times n$–Matrix. Wenn gilt $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$, dann hat das Produkt AB eine Inverse und es gilt $(AB)^{-1} = (AB)^T$.

- Es gilt: $(x, A^T y) = x^T A^T y = (Ax)^T y = (Ax, y)$.
- $(Ax, Ay) = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x^T A^{-1} Ay = x^T y = (x, y)$.
- Es gilt $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|Ax\|$.
- Es gilt $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$.