1. Lineare Gleichungssysteme (LGSe)

Ziele
- Die Lösungsmenge eines LGS bestimmen
- Fälle unterscheiden, bei denen ein LGS eine, keine oder ∞-viele Lösungen hat
- Eine systematische Methode zum Lösen von LGSen anwenden: Gauß Algorithmus

Definition Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \qquad (1)$$

lineare Gleichung in den Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ und rechter Seite b

$LG(a_1, \dots, a_n; b)$

Notation
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Vektor $(x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (Transponiert)
- $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ 'Summe'
- $\mathcal{L}(LG(a_1, \dots, a_n; b))$ ist die Lösungsmenge von (1)

Satz 1. Gibt es ein $a_j \neq 0$, dann gilt

$$\mathcal{L}(LG(a_1, \dots, a_n; b)) = \Big\{ \Big(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \frac{b}{a_j} - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} \frac{a_\ell}{a_j} \alpha_\ell, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n\Big) \; \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\}$$

2. Sind alle $a_j = 0$, dann gilt

$$\mathcal{L}(LG(a_1, \dots, a_n; b)) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & b = 0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beweis</u> 1. $a_1 x_1 + \dots + \overset{\neq 0!}{a_j} x_j + \dots + a_n x_n = b$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_j} x_1 + \dots + x_j + \dots + \frac{a_n}{a_j} x_n = \frac{b}{a_j}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_j = \frac{b}{a_j} - \frac{a_1}{a_j} x_1 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j} x_{j-1} - \frac{a_{j+1}}{a_j} x_{j+1} - \dots - \frac{a_n}{a_j} x_n$$

$$= \frac{b}{a_j} - \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq j}}^{n} \frac{a_\ell}{a_j} x_\ell$$

Jetzt kann man $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ beliebig wählen!

2. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = b$$

Stimmt immer wenn $b = 0$, sonst nie!

$\boxtimes$

'Beweis Ende'

Beispiele

- $n = 2$:

$$3x_1 - x_2 = 4$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_2 = 3x_1 - 4$$

Geradengleichung mit

$$\mathcal{L}(LG(3,-1;4)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 3\alpha_1 - 4 \end{pmatrix} : \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

- $n = 3$:

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_1 = 2 - 4x_2 - 4x_3$$

$$\mathcal{L}(LG(1,4,4;2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 4\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} : \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ebene

- Für n beliebig nennt man $LG(a_1, \dots, a_n; b)$ '<u>Hyperebene</u>'.

Wir gehen nun weiter, von linearen Gleichungen zu linearen Gleichungs<u>systemen</u>.

<u>Definition</u> Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n$ reelle Zahlen $a_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und m reelle Zahlen b_i, $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann heißen die m linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n &= b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

ein lineares Gleichungssystem (LGS) von m Gleichungen in den n <u>Unbekannten</u> $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit <u>Koeffizienten</u> a_{ij} und <u>rechten Seite</u> $b_1, \dots, b_m$.
Die lineare Gleichung $a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,n} x_n = b_i$ heißt <u>i-te Zeile</u> des LGSs.

<u>Einfache Beispiele (komplizierter kommen später!)</u>

- analytische Geometrie: zB Schnitt von Geraden oder Ebenen

- GPS-ortung: Suche Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ meiner Position.

Ich kenne die Distanzen r_1, r_2, r_3, r_4 zu Sateliten mit Positionen

$$(m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}), \dots, (m_{4,1}, m_{4,2}, m_{4,3}).$$

Das heißt

$$(x_1 - m_{1,1})^2 + (x_2 - m_{1,2})^2 + (x_3 - m_{1,3})^2 = r_1^2$$
$$(x_1 - m_{2,1})^2 + (x_2 - m_{2,2})^2 + (x_3 - m_{2,3})^2 = r_2^2$$
$$(x_1 - m_{3,1})^2 + (x_2 - m_{3,2})^2 + (x_3 - m_{3,3})^2 = r_3^2$$
$$(x_1 - m_{4,1})^2 + (x_2 - m_{4,2})^2 + (x_3 - m_{4,3})^2 = r_4^2$$

Idee: ziehe erste Gleichung von den restlichen drei ab.

zB. Gleichung 2 − Gleichung 1 ergibt

$$(x_1 - m_{2,1})^2 - (x_1 - m_{1,1})^2 + (x_2 - m_{2,2})^2 - (x_2 - m_{1,2})^2 + (x_3 - m_{2,3})^2 - (x_3 - m_{1,3})^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$x_1^2 - 2m_{2,1}x_1 + m_{2,1}^2 - x_1^2 + 2m_{1,1} - m_{1,1}^2 + x_2^2 - 2m_{2,2}x_2 + m_{2,2}^2 - x_2^2 + 2m_{1,2}x_2 + m_{1,2}^2 + x_3^2 - 2m_{2,3}x_3 + m_{2,3}^2$$
$$- x_3^2 + 2m_{1,3}x_3 - m_{1,3}^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2m_{1,1} - 2m_{2,1})x_1 + (2m_{1,2} - 2m_{2,2})x_2 + (2m_{1,3} - 2m_{2,3})x_3$$
$$= r_2^2 - r_1^2 + m_{1,1}^2 - m_{2,1}^2 + m_{1,2}^2 - m_{2,2}^2 + m_{1,3}^2 - m_{2,3}^2$$

eine LG in x_1, x_2, x_3!

Analog für Gleichung 3 − Gleichung 1 und
Gleichung 4 − Gleichung 1 erhält

$$(2m_{11}-2m_{21})x_1+(2m_{12}-2m_{212})x_2+(2m_{13}-2m_{213})x_3=r_2^2-r_1^2+\sum_{i=1}^{3}(m_{1i}^2-m_{2i}^2)$$
$$(2m_{11}-2m_{31})x_1+(2m_{12}-2m_{312})x_2+(2m_{13}-2m_{313})x_3=r_3^2-r_2^2+\sum_{i=1}^{3}(m_{1i}^2-m_{3i}^2)$$
$$(2m_{11}-2m_{41})x_1+(2m_{12}-2m_{412})x_2+(2m_{13}-2m_{413})x_3=r_4^2-r_2^2+\sum_{i=1}^{3}(m_{1i}^2-m_{4i}^2)$$

ein LGS!

[In der Praxis werden mehrere Distanzen gemessen und (x_1, x_2, x_3) mittels Ausgleichsrechnung bestimmt ↝ später]

Wir wollen wissen wie man LGS löst und wie man einem Computer beibringen kann, LGS zu lösen ⟶ <u>'Algorithmus'</u>

<u>Definition</u> $x_1, \dots, x_n$ Lösung eines LGS wenn $x_1, \dots, x_s$ alle linearen Gleichungen erfüllt.
Die Lösungsmenge ist durch

$$\mathcal{L}(LG(a_{11}, \dots, a_{1n}; b_1)) \cap \dots \cap \mathcal{L}(LG(a_{m1}, \dots, a_{mn}; b_m))$$

gegeben.

Matrixnotation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ heißt $m \times n$ Matrix

Mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ schreiben wir

auch $Ax = b$ anstelle von (2).
und nennen (2) auch $LGS(A;b)$.

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Idee: transformiere LGS auf einfachere Form.

Definition Zwei LGSe heißen äquivalent falls sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Es gibt drei wichtige Operationen, die ein beliebiges LGS in ein äquivalentes überführen:

I. Vertauschen von Zeilen

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned} \quad \overset{\text{äquivalent}}{\sim} \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

vereinfachte Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

II. Addieren eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

$$\begin{array}{l|l} x_1 - 3x_2 = 5 & \cdot(-2) \\ 2x_1 + x_2 = 3 & \end{array} + \sim \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 7x_2 = -7 \end{array}$$

vereinfachte Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right)$$

Dreiecksgestalt

III. Multiplizieren einer Zeile um ein Vielfaches

$$\begin{array}{l|l} x_1 - 3x_2 = 5 & \\ 7x_2 = -7 & \cdot\frac{1}{7} \end{array} \sim \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 5 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

<u>Idee:</u> Durch Aneinanderreihung von I, II, III auf vereinfachte Form bringen:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 5 \\ x_2 &= -1 \end{aligned} \Big|\cdot 3 \quad \Big\}+ \sim \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$-\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Nullen erzeugen!

$$\sim \begin{array}{c} \cdot 5 \\ + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -5 & -7 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -5 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} + \\ \cdot -\frac{1}{5} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ \cdot -\frac{2}{5} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2}, \; x_2 = 1, \; x_3 = -\frac{1}{2}$$

Erkenntnis: Wenn wir LGS auf $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \end{pmatrix}$ umformen können, können wir die Lösung direkt ablesen.

Ist das immer möglich?

<u>Bsp</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & s-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 \end{array}\right)$$

Fall 1: $s+1 \neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

Fall 2: $s+1 = 0$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_4 = -\frac{5}{2}$$
$$x_3 - 2x_4 = 2$$

Spezielle Lösung

$x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0$

Allgemein:

$$x_3 = 2 + 2x_4$$
$$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_2 - 4x_4$$

können beliebig gewählt werden!

$$\Rightarrow \mathcal{L}(LGS(A;b)) = \left\{ \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - 4t,\ s,\ 2+2t,\ t\right)^T : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

2-dim Ebene in $\mathbb{R}^4$

spezielle Lösung

Systematisierung

Notation: $e^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← k-te Position

heißt ~~k-ter Einheitsvektor~~

Definition Eine $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist in <u>Zeilenstufenform</u>, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ $(r \leq \min\{m,n\})$ und Indices $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$$

so daß für alle $k \in \{1, \dots, r\}$

$$(a_{1 i_k}, a_{2 i_k}, \dots, a_{m i_k})^t = e_k \,, \quad \text{und}$$

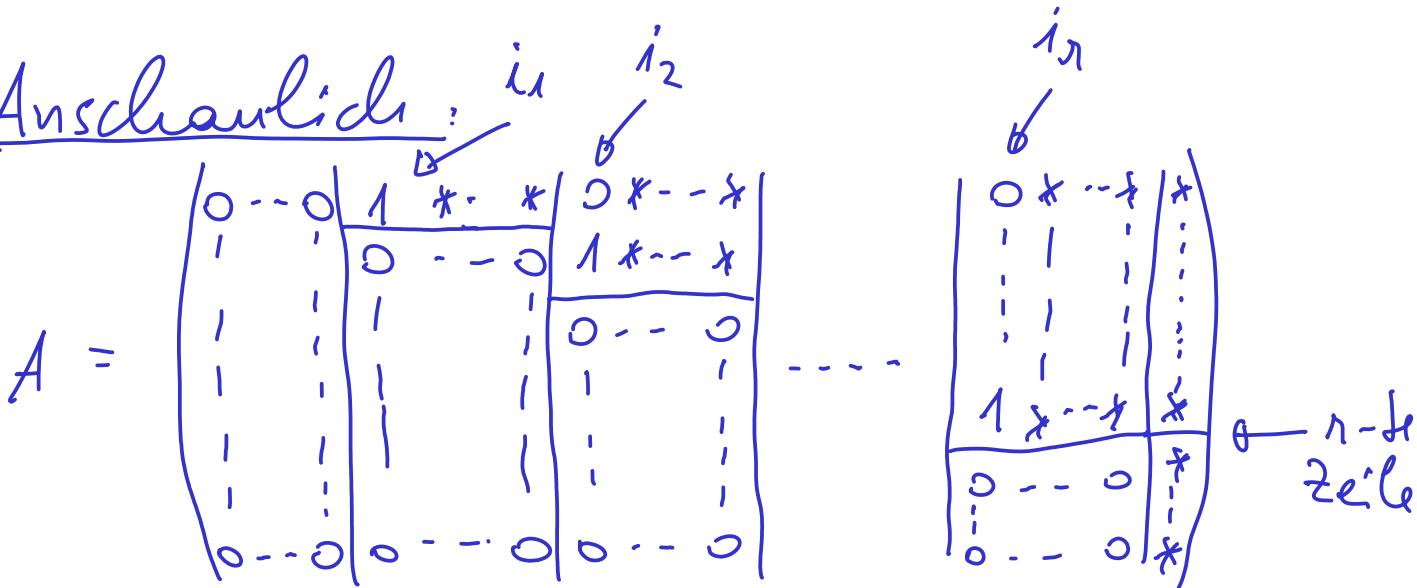
i_k-te Spalte

$$j < i_k \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \geq k$$

und $a_{ij} = 0$ für alle $i > r$.

Die Indizes $i_1, \dots, i_r$ heißen <u>Pivotindizes</u>, die Spalten $(a_{1 i_k}, \dots, a_{m i_k})^t$ heißen <u>Pivotspalten</u>.

<u>Anschaulich</u>:



Gauß Eliminations Algorithmus

zur Transformation eines LGS $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform.

Setze $i := 1$, $j := 1$.

α) Falls $i > m$ oder $j > n$ $\longrightarrow$ ende

$(E)_j$: Führe im j-ten Eliminationsschema einen Eliminationsschritt durch:

a) Falls möglich, bestimme einen Zeilenindex $p \in \{i, \dots, m\}$, für den $a_{p,j} \neq 0$, sonst setze $j := j+1$ und gehe zu α).

b) Falls $p \neq i$, vertausche diese beiden Zeilen und numeriere sie entsprechend um.

c) Für $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$: Bilde $l_{ki} = \frac{a_{kj}}{a_{ij}}$ und subtrahiere das l_{ki}-fache der i-ten Zeile von der k-ten Zeile

d) Multipliziere die i-te Zeile mit $\frac{1}{a_{i,j}}$.

e) Setze $i := i+1$, $j := j+1$ und gehe zu α).

<u>Satz</u> Jedes LGS läßt sich durch Zeilenumformungen in ein äquivalentes LGS transformieren, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform vorliegt.

<u>Beweis</u> Der Gauß Eliminations Algorithmus endet immer in Zeilenstufenform. ∎

<u>Bemerkung</u> (Rechenaufwand für $m=n$) in arithmetischen Operationen!

In (E_j):

c) Für $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$

- Bilde l_{ki} ... 1 Division
- Multipliziere i-te Zeile mit l_{ki} ... $(n-j+1)$ Multiplikationen
- Subtrahieren ... $(n-j+1)$ Subtraktionen

Nullen in den ersten $j-1$ Spalten müssen nicht ausgerechnet werden!

Insgesamt für alle k:

$$1 + 2(n-j+1)$$

Summieren über $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ $\rightarrow$ $n-1$ mal

$\Rightarrow$ Aufwand in Schritt j ist

$$(n-1)\big(1 + 2(n-j+1)\big)$$

i.A. gibt es n Schritte, also gilt

Gesamtaufwand $\sim \sum_{j=1}^{n} (n-1)\big(1+2(n-j+1)\big)$

$$= (n-1)\sum_{j=1}^{n}(3+2n-2j) = (n-1)\Big[3n + 2\cdot\overbrace{\sum_{j=1}^{n}(n-j)}^{\frac{n(n+1)}{2}}\Big]$$

$$= (n-1)\cdot\Big[3n + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\Big]$$

$$= n^3 + 3n^2 - 4n$$

$\rightarrow$ Gesamtaufwand zur Lösung eines allgemeinen LGS mit $n = 10^6$ ist $\geq 10^{18}$ arithmetische Operationen!

Systematisches Ablesen der Lösungsmenge eines LGS in Zeilenstufenform:

$$
(Z|c) \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
 & & i_1 & & & i_2 & & & i_r \\
\end{array}
\\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * \cdots & * & \\
\vdots & & \vdots & 0 & \cdots & & 0 & 1 & * \cdots & * & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\end{array}\right.
\begin{array}{ccc|c}
0 & * & \cdots * & c_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & * & \cdots * & c_r \\
\hline
0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}
\Bigg)
\end{array}
$$

r-te Zeile

Fall 1: Es gibt $j \in \{r+1, \dots, m\}$ mit $c_j \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung.

Fall 2: $r = n$

$$
\Rightarrow (Z|c) = \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots\ 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & c_n \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$\Rightarrow$ $x_i = c_i$ $\quad i = 1, \dots, n$ ist einzige Lösung

Fall 3: $r < n$

Wir vertauschen Spalten von A um zu der Form

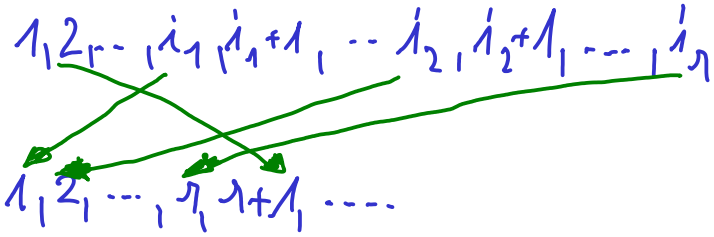
$$(t|c) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ r \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & * & \cdots & * & c_r \\ \hline & & 0 & & & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

zu kommen.

Dies entspricht einer Umnumerierung der Unbekannten $x_{i_1} \to y_1, \ldots, x_{i_r} \to y_r$.

z.B.

$$\begin{aligned} x_1 &\to y_{r+1} \\ x_2 &\to y_{r+2} \\ &\vdots \\ x_{i_1-1} &\to y_{r+i_1-1} \\ x_{i_1} &\to y_1 \\ x_{i_1+1} &\to y_{r+i_1} \\ &\vdots \\ x_{i_2-1} &\to y_{r+i_2-2} \\ x_{i_2} &\to y_2 \\ &\vdots \\ x_{i_r-1} &\to y_{i_r} \\ &\vdots \\ x_n &\to y_n \end{aligned}$$



und dem LGS

$$
\begin{array}{llllll}
y_1 & & & + z_{1,r+1} y_{r+1} + \dots + z_{1,n} y_n = c_1 \\
 & y_2 & & + z_{2,r+1} y_{r+1} + \dots + z_{2,n} y_n = c_2 \\
 & & \ddots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
 & & & y_r + z_{r,r+1} y_{r+1} + \dots + z_{r,n} y_n = c_r
\end{array}
$$

Wir sehen, daß $y_{r+1}, \dots, y_n$ frei wählbar sind (und genannt $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$), und

$$
\mathcal{L}\big(LGS(z;c)\big) = \left\{ \begin{array}{ll}
y_k = c_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} z_{k,r+\ell}\, \alpha_\ell & k \in \{1, \dots, r\} \\
y_{r+\ell} = \alpha_\ell & \ell \in \{r+1, \dots, n\}, \\
\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} &
\end{array} \right\}
$$

Umnumerieren $y_j = x_k$ ergibt den folgenden Satz.

Satz Sei $Zx = c$ in Zeilenstufenform und $i_1 < \dots < i_r$ die Indexmenge der Pivotspalten.
Setzen wir außerdem

$$\{j_1, j_2, \dots, j_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$$

Dann gilt:

(i) Falls $c_j \neq 0$ für ein $j > r$, dann existiert keine Lösung

(ii) Ansonsten gilt

$$\mathcal{L}(LGS(Z;c)) = \left\{ \begin{array}{ll} x_{i_k} = c_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell z_{k,j_\ell}, & k = \{1, \dots, r\} \\ x_{j_\ell} = \alpha_\ell & \ell = \{1, \dots, n-r\} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

Definition Der **Rang** einer $m \times n$ Matrix Z

Zeilenstufenform ist durch die Anzahl Pivotspalten r definiert.

Der Rang einer beliebigen $m \times n$ Matrix A ist definiert als der Rang der äquivalenten Zeilenstufenform. Wir schreiben $r = \operatorname{rang}(A)$.

A hat <u>vollen Zeilenrang</u> wenn $r = m$

— " — <u>vollen Rang</u> — " — $r = \min(n, m)$

<u>Satz</u> Falls A vollen Zeilenrang hat, dann gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine Lösung des LGSs $Ax = b$.

<u>Definition</u> Eine $m \times n$ Matrix heißt <u>quadratisch</u> falls $m = n$.

Ein $m \times n$ LGS heißt <u>quadratisch</u>, falls $m = n$.

<u>Satz</u> Falls A quadratisch ist und vollen Rang hat, dann gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}^m$ <u>genau</u> eine Lösung des LGS $Ax = b$.

2. Vektoren und Matrizen

zur Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ heißt $m \times n$-Matrix

Die Menge von $m \times n$ Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m,n}$ bezeichnet.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ heißt n-dimensionaler Vektor.

Die Menge von n-dimensionalen Vektoren wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Motivation $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ definieren ein LGS, siehe Kapitel 1. Gesucht wird eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

Ziele
- Rechnen mit Matrizen
- Erkennen wann eine Rechenoperation definiert ist
- 'Dividieren'; mit der Inversen einer Matrix umgehen.

<u>Notation</u>: $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Wir schreiben manchmal

$$(A)_{i,j} = a_{i,j}$$

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$

$$(A)_{1,2} = -3$$

<u>Bemerkung</u> Vektoren sind spezielle Matrizen: $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n,1}$, daher beschränken wir uns im Folgenden auf Matrizen.

<u>Das Rechnen mit Matrizen</u>

- <u>Addition</u> $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$\Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert durch $(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}$

$i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Bsp.:

- $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

- <u>Multiplikation mit einem Skalar</u> $A \in \mathbb{R}^{m,n}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda A \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert durch $(\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$

$i \in \{1, \dots, m\}, \; j \in \{1, \dots, n\}$.

Bsp.:

- $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$

- $LGS(Z; c)$ mit Z in ZSF, z.B.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\in \mathbb{R}^{3,4}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{matrix}}_{\in \mathbb{R}^{3}} \right)$$

Wir wissen aus Kapitel 1, daß

$$\mathcal{L}(LGS(Z;c)) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 2 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Addition

Multiplikation mit einem Skalar

müssen gleich sein!

- <u>Multiplikation zweier Matrizen</u> $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ ergibt neue Matrix $AB \in \mathbb{R}^{m,p}$, definiert durch

$$(AB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{i,\ell} \, (B)_{\ell,j}$$

$i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$

<u>Bsp.</u> – $a \in \mathbb{R}^{1,n}$, $x \in \mathbb{R}^{n,1}$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \in \mathbb{R}^{1,1} \simeq \mathbb{R}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n,1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{m,1} \simeq \mathbb{R}^m$$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$

$\Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{2,3}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}}_{AB}$$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Um $LGS(A;b)$ zu lösen, beachte

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{BA}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} x = Bb \Rightarrow x = Bb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Lösung von $LGS(A;b)$ kann für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ sofort angeben: $\mathcal{L}(LGS(A;b)) = \{Bb\}$

- Zeilenumformungen

Warnung 1 Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$!

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

Definition

- **Nullmatrix** $O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert durch

$$(O_{m,n})_{i,j} = 0 \text{ für alle } i \in \{1,\dots,m\}, \; j \in \{1,\dots,n\}$$

- **Diagonalmatrix** $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiert durch

$$(\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n))_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_i & i = j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

- <u>Einheitsmatrix</u> I_n definiert durch

$$I_n = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}}) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

<u>Warnung 2</u> $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$!

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{aber } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

<u>Satz</u> A, B, C so, daß alle Operationen definiert sind. Es gilt

i) $A + B = B + A$

ii) $(A+B)+C = A + (B+C)$

iii) $(AB)C = A(BC)$

iv) $(A+B)C = AC + BC$

$A(B+C) = AB + AC$

<u>Beweis von iii):</u>

$$A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad , C \in \mathbb{R}^{n,p}$$

$$((A+B)C)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (A+B)_{i,\ell} \, (C)_{\ell,j}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left((A)_{i,\ell} + (B)_{i,\ell} \right) (C)_{\ell,j}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{i,\ell} (C)_{\ell,j} + (B)_{i,\ell} (C)_{\ell,j}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{i,\ell} (C_{\ell,j}) + \sum_{\ell=1}^{n} (B)_{i,\ell} (C)_{\ell,j}$$

$$= (AC)_{i,j} + (BC)_{i,j}$$

$$i \in \{1, \dots, m\}, \; j \in \{1, \dots, p\} .$$

Rest Übung $\blacksquare$

- <u>Transponieren</u> einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ist $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ definiert durch

$$(A)^T_{i,j} = (A)_{j,i} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,\dots,\underline{\underline{n}}\} \\ j \in \{1,\dots,\underline{\underline{m}}\} \end{array}$$

<u>Bsp.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii) $(AB)^T = B^T A^T$

<u>Beweis von iii)</u> $A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,p}, AB \in \mathbb{R}^{m,p}, (AB)^T \in \mathbb{R}^{p,m}$

$$\left((AB)^T\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{\ell} (A)_{j,\ell} (B)_{\ell,i}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} (A^T)_{\ell,j} (B^T)_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} (B^T)_{i,\ell} (A^T)_{\ell,j}$$

$$= \left((B^T)(A^T) \right)_{i,j}$$

Rest Übung $\blacksquare$

<u>Definition</u> $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ heißt <u>symmetrisch</u>, falls $A = A^T$ (insbesondere muß dann A quadratisch sein!).

<u>Bsp.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ ist symmetrisch, also $(A)_{i,j} = (A)_{j,i}$

- <u>Inverse</u> einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist Matrix $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$AX = I_n.$$

Existiert eine Inverse von A, so heißt A <u>invertierbar</u> oder <u>regulär</u>. Andernfalls heißt A <u>singulär</u>.

<u>Bemerkung</u> Nicht jede Matrix $A \neq O_{n,n}$ ist invertierbar!!

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Nehmen wir an A wäre invertierbar mit Inverser X, dh. $AX = I_2$.

Erinnern wir uns nun, daß $B \cdot A = O_{2,2}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir bekämen also

$$O_{2,2} = (B \cdot A) \cdot X = B \cdot (A \cdot X) = B I_2 = B$$

und das ist ein Widerspruch. A kann daher nicht invertierbar sein.

Im folgenden wollen wir genau verstehen welche Matrizen invertierbar sind. Dazu benötigen wir etwas Vorbereitung.

<u>Matrix-Matrix-, Matrix-Vektor-Multiplikation und LGS</u>

Wie wir bereits wissen, ist die Matrix-Vektor multiplikation Ax für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^{n \times 1})$ ein Spezialfall der Matrixmultiplikation.
Es gilt für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, daß

$$Ax \in \mathbb{R}^m (= \mathbb{R}^{m \times 1}), \text{ wobei}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n \end{pmatrix}$$

Für $b \in \mathbb{R}^m$ kann also $LGS(A; b)$ geschrieben werden als $Ax = b$.

<u>Definition</u> Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dann bezeichnen wir mit $x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^n$ die ℓ-te Spalte von X,

d.h. $x_i^{(\ell)} = (X)_{i,\ell}$ $\quad i \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,\ell} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,\ell} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix}$$

$x^{(\ell)}$

Wir schreiben $X = (x^{(1)} | \dots | x^{(p)})$

Lemma Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann gilt

$$AX = (Ax^{(1)} | \cdots | Ax^{(p)}).$$

Beweis

$$(AX)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (A)_{i,\ell} (X)_{\ell,j} =$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (A)_{i,\ell} x_{\ell}^{(j)} = (Ax^{(j)})_i$$

$\blacksquare$

Lemma Sei $AX = B$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$,

$X = (x^{(1)} | \cdots | x^{(p)})$ und $B = (b^{(1)} | \cdots | b^{(p)})$.

Dann gilt

$$x^{(\ell)} \in \mathcal{L}(LGS(A; b^{(\ell)})) \text{ für } \ell \in \{1, \ldots, p\}.$$

Beweis Nach dem vorigen Lemma gilt

$$b^{(\ell)} = Ax^{(\ell)}$$

$\blacksquare$

Definition Sei $x^{(1)}, \dots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $c_1 x^{(1)} + \dots + c_p x^{(p)}$ **Linearkombination** von $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$.

Die Vektoren $e^{(1)}, \dots, e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$e_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

heißen **Einheitsvektoren** in $\mathbb{R}^n$.

Der Vektor $e^{(i)}$ heißt i-ter Einheitsvektor.

Lemma Jedes $b \in \mathbb{R}^n$ läßt sich als Linearkombination der Einheitsvektoren darstellen:

$$b = b_1 e^{(1)} + \dots + b_n e^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{(i)}$$

Beweis

$$\left(b_1 e^{(1)} + \dots + b_n e^{(n)}\right)_j = b_1 \underbrace{e_j^{(1)}}_{=0!} + \dots + b_j e_j^{(j)} + \dots + b_n \underbrace{e^{(n)}}_{=0}$$

$$= b_j e_j^{(j)} = b_j$$

$\blacksquare$

Nun sind wir bereit den folgenden Satz zu zeigen.

<u>Satz</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(i) A ist invertierbar
(ii) A hat vollen Rang: $\operatorname{rang}(A) = n$
(iii) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt $LGS(A;b)$ eine Lösung
(iv) Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt $LGS(A;b)$ <u>genau</u> eine Lösung
(v) Für jedes $\ell \in \{1,\dots,n\}$ besitzt $LGS(A;e^{(\ell)})$ eine Lösung.
(vi) Für jedes $\ell \in \{1,\dots,n\}$ besitzt $LGS(A;e^{(\ell)})$ <u>genau</u> eine Lösung

<u>Beweis</u> <u>(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)</u> wissen wir aus Kapitel 1.

Wir zeigen <u>(v) $\Rightarrow$ (iv)</u>.

Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Nach dem letzten Lemma ist
$$b = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{(i)}$$

Sei $x^{(i)} \in \mathcal{L}(LGS(A;e^{(i)}))$ $\quad i \in \{1,\dots,n\}$.

[$x^{(i)}$ existiert nach Annahme (v)]

Definiere $x = b_1 x^{(1)} + \dots + b_n x^{(n)}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(b_1 x^{(1)} + \dots + b_n x^{(n)}\right) \\ &= b_1 A x^{(1)} + \dots + b_n A x^{(n)} \\ &= b_1 e^{(1)} + \dots + b_n e^{(n)} = b, \end{aligned}$$

also $x \in \mathcal{L}(LGS(A;b))$.

Es folgt (iv).

Die Folgerung $\underline{(iv) \Rightarrow (v)}$ ist trivial.

Als Übung beweise $\underline{(v) \Leftrightarrow (vi)}$.

Wir wissen nun

$$\underline{(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)}.$$

Nun zeigen wir

$\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$

Sei A invertierbar mit Inverser X.
Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $x = Xb$.

Dann gilt $Ax = AXb = I_n b = b$, also $x \in \mathcal{L}(LGS(A;b))$. Das beweist (iii)

Schliesslich zeigen wir $\underline{(v) \Rightarrow (i)}$.

Sei $x^{(i)} \in \mathcal{L}(LGS(A; e^{(i)}))$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Setze

$$X = (x^{(1)} | \dots | x^{(n)}).$$

Dann gilt (siehe oben)

$$AX = (Ax^{(1)} | \dots | Ax^{(n)}) = (e^{(1)} | \dots | e^{(n)}) = I_n,$$

also ist A invertierbar.

$\blacksquare$

Ist die Inverse eindeutig?

<u>Satz</u> Die Inverse X einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eindeutig.

<u>Beweis</u> Sei A invertierbar und nehmen wir an, daß X, Y zwei Inverse sind, d.h.

$$AX = AY = I_n.$$

Sei $X = (x^{(1)} | \dots | x^{(n)})$, $Y = (y^{(1)} | \dots | y^{(n)})$.

Dann gilt

$$y^{(i)}, x^{(i)} \in \mathcal{L}(LGS(A; e^{(i)})) \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wegen (vi) im vorigen Satz gilt aber

$x^{(i)} = y^{(i)}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, also $X = Y$. $\blacksquare$

<u>Definition</u> Wir schreiben A^{-1} für die (eindeutig bestimmte) Inverse von A, also

$$A A^{-1} = I_n .$$

<u>Satz</u> Es gilt $A^{-1} A = I_n$

<u>Beweis</u>

Wir wissen, daß $A A^{-1} = I_n$ und wollen zeigen, daß $A^{-1} A = I_n$ oder

$$X = O_{n,n} \quad \text{mit} \quad X = A^{-1} A - I_n .$$

Es gilt

$$AX = A(A^{-1} A - I_n) = A(A^{-1} A) - A I_n$$

$$= (A A^{-1}) A - A I_n = I_n A - A I_n = A - A = O_{n,n} .$$

Es folgt mit $X = (x^{(1)} | \dots | x^{(n)})$, daß

$$A x^{(i)} = 0_{n,1} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\} .$$

Klarerweise gilt auch

$$A\mathcal{O}_{n,1} = \mathcal{O}_{n,1}.$$

Es folgt also, daß

$$x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \mathcal{O}_{n,1} \in \mathcal{L}(LGS(A; \mathcal{O}_{n,1})).$$

Wegen (iv) im vorigen Satz gilt

$$x^{(1)} = \dots = x^{(n)} = \mathcal{O}_{n,1}, \text{ also } X = \mathcal{O}_{n,n} \quad \blacksquare$$

Rechenregeln

Satz $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann gilt

(i) A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) AB ist invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) A^T ist invertierbar mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis

(i) Im vorigen Satz haben wir gezeigt, daß $A^{-1}A = I_n$, was (i) impliziert.

(ii) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

(iii) $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$

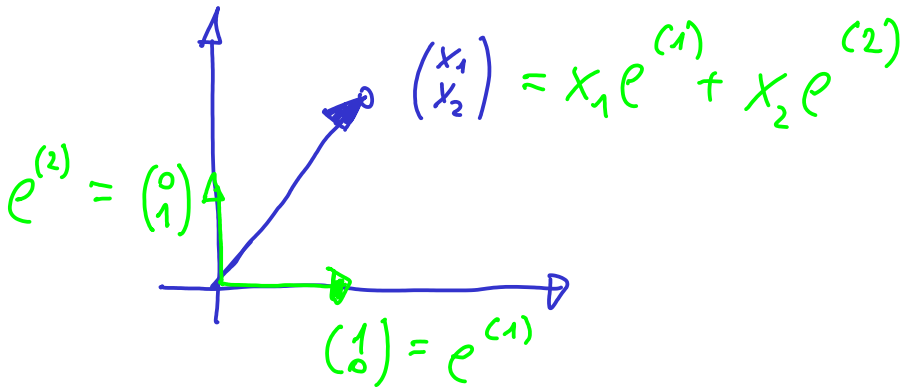
$\blacksquare$

3. Vektorräume und Basen

Ziele
- Geometrische Objekte in n-dimensionalem Raum verstehen
- Lineare Abbildungen und deren Zusammenhang mit Matrizen und LGS zu verstehen
- Koordinatentransformationen

Was ist ein Vektor?

2d:



Definition • <u>Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$</u> ist die Menge aller reellen $n \times 1$ Matrizen:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

• Der <u>Vektorraum $\mathbb{C}^n$</u> ist die Menge aller komplexen $n \times 1$ Matrizen:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

• Wenn es egal ist ob $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so schreiben wir manchmal $\mathbb{K}^n$.

<u>Wichtige Operationen auf $\mathbb{K}^n$:</u>

• Addition

$$a, b \in \mathbb{K}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{K}^n$$

• Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \in \mathbb{K},\ a \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Achtung: Multiplikation zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{K}^n$ ist i.A. nicht definiert, außer $n = 1$!

<u>Definition</u>: Sei $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$.

Dann heißt

$$a = x_1 a^{(1)} + \dots + x_k a^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{k} x_k a^{(\ell)} \in \mathbb{K}^n$$

<u>Linearkombination</u> (LK) der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ (mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_k$).

- Sei $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{K}^n$. Dann ist das <u>Erzeugnis</u> (span) von $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ definiert durch

$$\operatorname{span}(\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}) := \left\{ \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell a^{(\ell)} : x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{K} \right\}.$$

<u>Bemerkungen</u>

- Der span ist also die Menge aller Linearkombinationen

- $a = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell a^{(\ell)} \Leftrightarrow a = Ax$, wobei

$$A = \left(a^{(1)} | \cdots | a^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$$

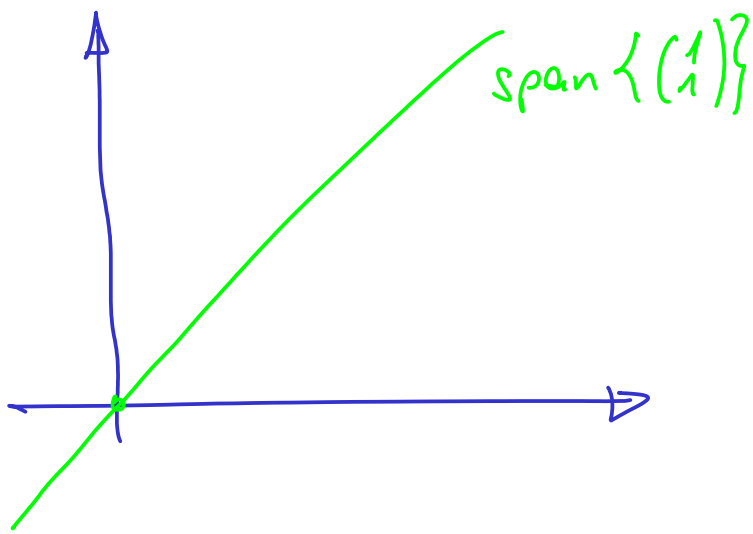
- $\mathbb{R}^2$ $\qquad a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\{a\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

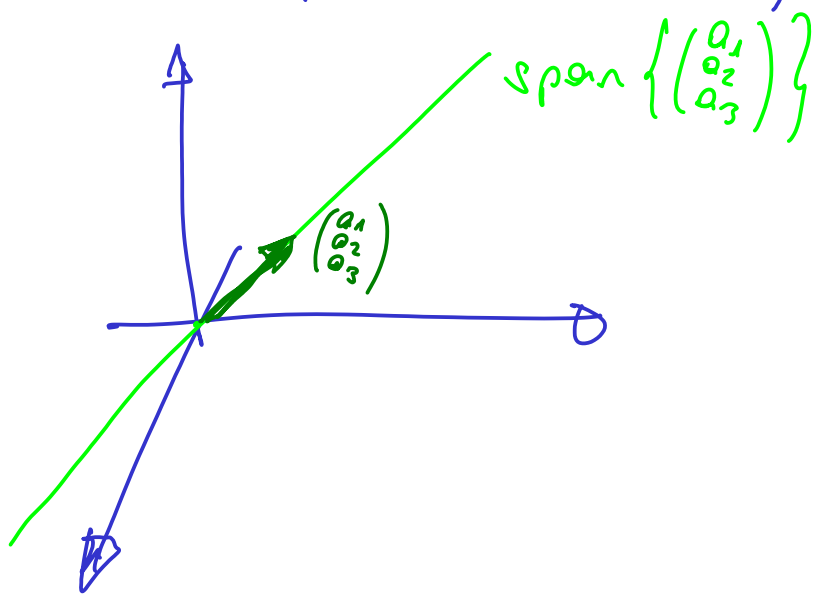
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{span}\{a\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$



Der span eines Vektors ist eine Gerade durch den Nullpunkt!

- $\mathbb{R}^3$ $\qquad a \in \mathbb{R}^3$

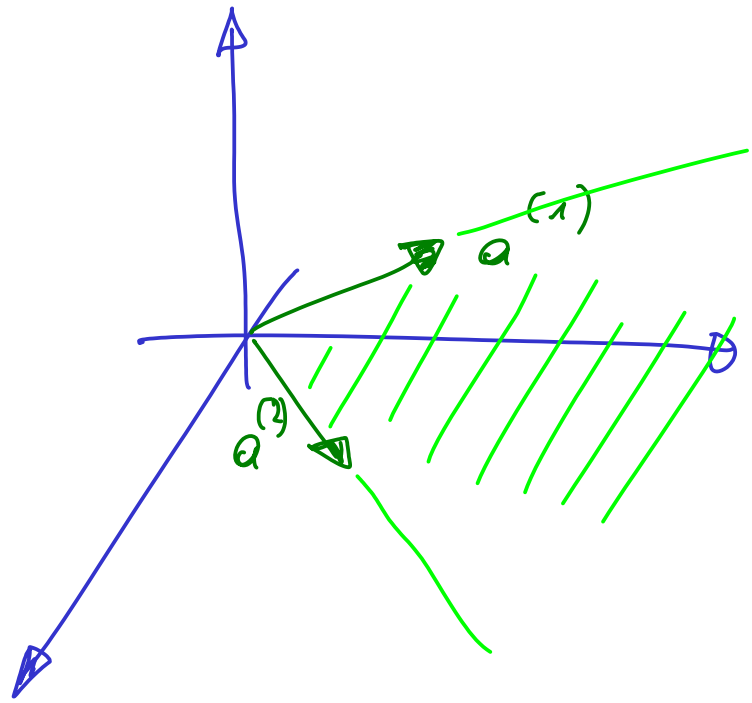
$$\operatorname{span}\{a\} = \left\{ \begin{pmatrix} x a_1 \\ x a_2 \\ x a_3 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$



Der span eines Vektors ist eine Gerade durch den Nullpunkt!

$a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\left(\{a^{(1)}, a^{(2)}\}\right) = \{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$



$\operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$ ist Ebene durch den Nullpunkt!

<u>Lemma</u> $u, v \in \operatorname{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\} \subseteq \mathbb{K}^n$, $x \in \mathbb{K}$.

Dann gilt

(i) $u + v \in \operatorname{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$

(ii) $\lambda u \in \operatorname{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$

<u>Beweis</u> (i) $u = \sum x_\ell a^{(\ell)}$ $\quad v = \sum y_\ell a^{(\ell)}$

$$\Rightarrow u + v = \sum \underbrace{(x_\ell + y_\ell)}_{\in \mathbb{K}} a^{(\ell)}$$

(ii) $u = \sum x_\ell a^{(\ell)}$

$$\Rightarrow \lambda u = \sum \underbrace{(\lambda x_\ell)}_{\in \mathbb{K}} a^{(\ell)}$$

$\blacksquare$

<u>Definition</u> $U \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt Unterraum falls für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(i) $u + v \in U$
(ii) $\lambda u \in U$

<u>Korollar</u> Für $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ ist $\operatorname{span}(\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\})$ ein Unterraum

<u>Beweis</u>: Folgt aus dem vorigen Lemma $\blacksquare$

Es gilt auch die Umkehrung

<u>Satz</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $U \subseteq \mathbb{K}^n$.

(i) U ist Unterraum

(ii) Es existieren $k \leq n$ und $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ mit $U = \operatorname{span}(\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\})$

Definition Sei $U = \operatorname{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ Unterraum. Dann heißt $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von U.

Lemma Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die Menge $\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0_{m,1}\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$, genannt $\ker(A)$, der <u>Kern</u> von A ($\hookrightarrow$ später)

Bew.: $x, y \in \ker(A)$

$$\Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = 0_{m,1} + 0_{m,1} = 0_{m,1}$$

$$\Rightarrow x + y \in \ker(A)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A\lambda x = \lambda A x = \lambda 0_{m,1} = 0_{m,1}$$

$$\Rightarrow \lambda x \in \ker(A)$$

$\blacksquare$

Lemma Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die Menge $\{Ax \in \mathbb{K}^m : x \in \mathbb{K}^n\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^m$, genannt $\operatorname{Bild}(A)$, das <u>Bild</u> von A

Bew.: Übung $\blacksquare$

<u>Bsp</u>: ·) $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

(x,y)-Ebene in $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\\0\end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} \overset{\substack{y_1 = x_1+x_2\\ y_2 = x_2}}{=} \left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\0\end{pmatrix} : y_1, y_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ <u>nicht</u> eindeutig!

·) Ist die Anzahl der Erzeugenden Vektoren eindeutig?

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \in \mathbb{K}^n$, $\underline{a}^{(k+1)} = x_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + x_k \underline{a}^{(k)}$

Linearkombination, d.h. $\underline{a}^{(k+1)} \in \operatorname{span}\{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}\}$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\left(\{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k+1)}\}\right)$$

$$= \left\{ y_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + y_k \underline{a}^{(k)} + y_{k+1} \underline{a}^{(k+1)} : y_1, \dots, y_{k+1} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ y_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + y_k \underline{a}^{(k)} + y_{k+1} \left(x_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + x_k \underline{a}^{(k)} \right) : y_1, \dots, y_{k+1} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{(y_1 + y_{k+1} x_1)}_{z_1} \underline{a}^{(1)} + \dots + \underbrace{(y_k + y_{k+1} x_k)}_{z_k} \underline{a}^{(k)} : y_1, \dots, y_{k+1} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ z_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + z_k \underline{a}^{(k)} : z_1, \dots, z_k \in \mathbb{K} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \right\}$$

$\Rightarrow$ Anzahl der Erzeugenden ist <u>nicht</u> eindeutig.

<u>Definition</u> • Vektoren $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ heißen <u>linear abhängig</u> (LA) falls ein Index $i \in \{1, \dots, k\}$ existiert sodaß

$$\underline{a}^{(i)} \in \operatorname{span}\left\{ \underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(i-1)}, \underline{a}^{(i+1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \right\}$$

[es gilt dann nach obigem $\operatorname{span}\left\{ \underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(i-1)}, \underline{a}^{(i+1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \right\}$
$= \operatorname{span}\left\{ \underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \right\}$]

- Vektoren $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ heißen <u>linear unabhängig</u> falls sie nicht linear abhängig sind.

- Sei $U \subseteq \mathbb{K}^n$ Unterraum. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ von U heißt <u>Basis</u> von U.

<u>Lemma</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \in \mathbb{K}^n$.

(i) $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ sind LA

(ii) Es gibt $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \neq 0_{k,1}$ mit

$$x_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + \underline{x}_k a^{(k)} = 0$$

(iii) $\ker(A) \neq \{0_{k,1}\}$, $A = (\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(k)}) \in \mathbb{K}^{n \times k}$.

(iv) $\operatorname{rang}(A) < k$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii):

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ LA $\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\}$, $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k \in \mathbb{K}$

$$\underline{a}^{(i)} = y_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + y_{i-1} \underline{a}^{(i-1)} + y_{i+1} \underline{a}^{(i+1)} + \dots + y_k \underline{a}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell \, \underline{a}^{(\ell)} = 0 \text{, wobei } \begin{cases} x_\ell = x_\ell & \ell \neq i \\ x_\ell = -1 & \ell = i \end{cases}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Ang. $\sum x_\ell \, \underline{a}^{(\ell)} = 0$, $\quad \underline{x} \neq \underline{0}_{k,1}$

$$\Rightarrow \exists\, i \in \{1, \dots, k\} : x_i \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum \underbrace{\frac{x_\ell}{x_i}}_{y_\ell} \underline{a}^{(\ell)} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a}^{(i)} + \sum_{\ell \neq i} y_\ell \, \underline{a}^{(\ell)} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a}^{(i)} = \sum_{\ell \neq i} -y_\ell \, \underline{a}^{(\ell)} \Rightarrow \{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}\} \text{ LA}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ LA $\Leftrightarrow \exists\, \underline{x} \neq \underline{0}_{k,1}$ mit $A\underline{x} = \underline{0}_{k,1}$ ✓

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) folgt aus Zeilenstufenform ∎

<u>Lemma</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ und $A = (\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(k)}) \in \mathbb{K}^{m \times k}$

(i) $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$

(ii) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$

<u>Beweis</u> Übung!

<u>Bemerkung</u> Nach obigem Lemma gilt

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ Erzeugendensystem für $\mathbb{K}^n \Rightarrow k \geq n$

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ LU $\Rightarrow k \leq n$

$\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ Basis von $\mathbb{K}^n \Rightarrow k = n$

<u>Lemma</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)} \in \mathbb{K}^n$ und $A = (\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(n)}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(i) $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)}$ erzeugend für $\mathbb{K}^n$

(ii) $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)}$ Basis für $\mathbb{K}^n$

(iii) $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)}$ LU

(iv) A invertierbar

Signifikanz einer Basis

Sei $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ Basis eines Unterraums $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^n$.

<u>Definition</u> k heißt <u>Dimension</u> von $\mathcal{U}$, schreibe $k = \dim(\mathcal{U})$. Konvention: $\dim\{\underline{0}\} = 0$!

hängt nicht von der Wahl der Basis ab

Jedes $\underline{a} \in \mathcal{U}$ lässt sich darstellen als $\underline{a} = x_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + x_k \underline{a}^{(k)}$ mit <u>eindeutig</u> bestimmten <u>Koordinaten</u> $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$, der sogenannten <u>Koordinatendarstellung</u> von $\underline{a}$ bezüglich der Basis $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$.

<u>Bemerkung</u> Mit der Koordinatendarstellung können wir jeden k-dimensionalen Unterraum mit $\mathbb{K}^k$ identifizieren.

Lemma. Sei $A = (\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(m)}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar.

Dann gilt

$$\dim\Big(\overbrace{\operatorname{span}\{(S\underline{a}^{(1)} | \dots | S\underline{a}^{(m)})\}}^{S\,\mathrm{Bild}(A)}\Big) \text{ und } \dim(\ker(A)) = \dim(\ker(SA))$$

$$= \dim\Big(\underbrace{\operatorname{span}\{(\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(m)})\}}_{\mathcal{U} = \mathrm{Bild}(A)}\Big)$$

Beweis

Sei $\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(k)}$ Basis von $\mathcal{U}$.

Wir zeigen: $S\underline{b}^{(1)}, \dots, S\underline{b}^{(k)}$ ist Basis von $S\mathcal{U}$:

1.) $S\underline{b}^{(1)}, \dots, S\underline{b}^{(k)}$ ist l.u.:

Sei $x_1, \dots, x_k$ mit $\sum_i x_i S\underline{b}^{(i)} = \underline{0}$

$\Rightarrow S(\sum x_i \underline{b}^{(i)}) = \underline{0} \to \sum x_i \underline{b}^{(i)} = S^{-1}\underline{0} = \underline{0}$ ↯

2.) $S\underline{b}^{(1)}, \dots, S\underline{b}^{(n)}$ ist ES:

Sei $\underline{a} \in S\mathcal{U} \Rightarrow \underline{a} = S(\sum x_i \underline{b}^{(i)}) = \sum x_i S\underline{b}^{(i)}$ ✓

3.) $\ker(SA) = S\ker(A)$

∎

Satz Sei $(\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(m)}) \in K^{n \times m}$.

Dann gilt

$$\dim(\operatorname{span}\{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(m)}\}) = \operatorname{rang}(A)$$

Beweis

1.) Die Aussage gilt für A in ZSF
(weil Pivotspalten Basis bilden!)

2.) Der Gauß Algorithmus transformiert beliebiges A in eine Matrix Z in ZSF mittels invertierbarem S:

$$SA = Z$$

Nun folgt der Satz aus obigem Lemma $\blacksquare$

Satz (Rangsatz) Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Bild}(A)) + \dim(\mathrm{Kern}(A)) = n$$

Beweis Wegen dem obigen Lemma genügt es dies für $A = Z$ in ZSF zu zeigen.

Anderes Argument:

Sei $\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ Basis von $\ker(A)$

Wir können durch $\underline{b}^{(k+1)}, \dots, \underline{b}^{(n)}$ ergänzen sodaß

$$\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(k)}, \underline{b}^{(k+1)}, \dots, \underline{b}^{(n)} \text{ Basis von } \mathbb{K}^n.$$

Behauptung: $A\underline{b}^{(k+1)}, \dots, A\underline{b}^{(n)}$ Basis von $\mathrm{Bild}(A)$

1) Erzeugend: Sei $\underline{b} \in \mathrm{Bild}(A)$

$$\Rightarrow \exists\, \underline{x} = x_1 \underline{b}^{(1)} + \dots + x_n \underline{b}^{(n)} \in \mathbb{K}^n \text{ mit}$$

$$A\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i A \underline{b}^{(i)} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i A \underline{b}^{(i)} \checkmark$$

2) l.u.: Angenommen $\sum_{i=k+1}^{n} x_i A \underline{b}^{(i)} = \underline{0}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} x_i \underline{b}^{(i)} \in \ker(A)$$

$\Rightarrow \exists\ y_1, \dots, y_k$:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \underline{b}^{(i)} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \underline{b}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (-y_i) \underline{b}^{(i)} + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \underline{b}^{(i)} = 0$$

$$\Rightarrow x_i = 0$$

$\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(n)}$ Basis

$\blacksquare$

<u>Satz</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(i) A invertierbar

(ii) $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$

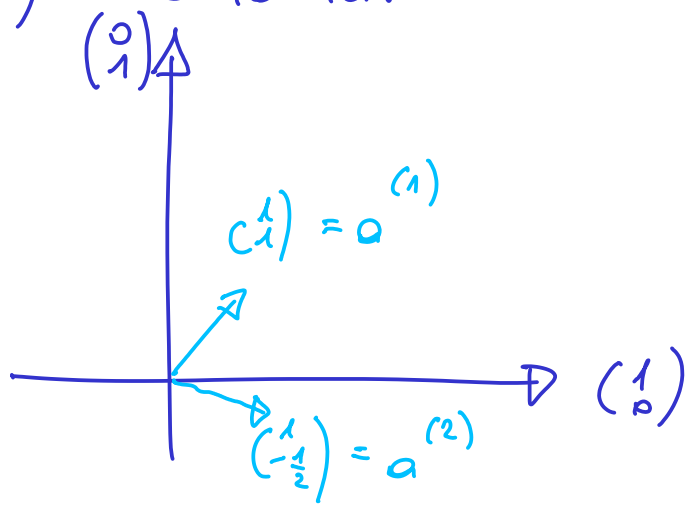
(iii) $\ker(A) = \{\underline{0}\}$

<u>Beweis</u> (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus Rangsatz.

Rest in Kap. 2 bewiesen.

$\blacksquare$

Beispiele •) Koordinaten in $\mathbb{R}^2$:



$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)}$$

$$= y_1 a^{(1)} + y_2 a^{(2)} = \left(a^{(1)} \middle| a^{(2)}\right)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$= ?$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Koordinatentransformation

•) $\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^{n+1}$

Basis für $n = 3$ [‘Monombasis’]

$\{1, x, x^2, x^3\}$

Andere Basis:

$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ [‘Lagrange Basis’]

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}, \frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)}, \frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)}, \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}$$

Vorteil von Lagrange Basis

Für $p \in \mathcal{P}_3$ gilt

$$p = p(0)\,p_0 + p(1)\,p_1 + p(2)\,p_2 + p(3)\,p_3$$

Übung!

Basiswechsel

Sei $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(k)}$ Basis von U.
$\underline{\tilde{a}}^{(1)}, \dots, \underline{\tilde{a}}^{(k)}$

Wir wissen: Für jedes $\underline{a} \in U$ gibt es Koordinaten $\underline{x}, \underline{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^k$ bezüglich dieser beiden Basen.

Wie können wir systematisch umrechnen?

<u>Definition</u> Die <u>Basiswechselmatrix</u> $S \in \mathbb{K}^{k \times k}$ ist definiert durch

$$\underline{\tilde{a}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} s_{j,i} \, \underline{a}^{(j)}$$

<u>Satz</u> Es gilt $\underline{\tilde{x}} = S^{-1} \underline{x}$.

4. Das Skalarprodukt

Definition Das <u>euklidische Skalarprodukt</u> auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y} \quad \text{für } \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n.$$

- $\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$ heißt <u>Norm</u> oder <u>Länge</u> des Vektors $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Einheitsvektor</u> wenn $\|\underline{x}\| = 1$
- Der Winkel $\measuredangle_{\underline{x},\underline{y}}$ zwischen Vektoren $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\cos \measuredangle_{\underline{x},\underline{y}} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}$$

- $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal wenn $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$, [bzw $\measuredangle_{\underline{x},\underline{y}} = 90°$]

Wir schreiben $\underline{x} \perp \underline{y}$

Satz (Eigenschaften des Skalarprodukts)

i) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$

ii) $\langle \underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{z} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$

iii) $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0 \quad [\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}]$

iv) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$ [Cauchy-Schwarz]

für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> (i) - (iii) Übung

(iv)

Definiere für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P(\lambda) := \langle \underline{x} + \lambda \underline{y}, \underline{x} + \lambda \underline{y} \rangle$$

$$= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + 2\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \in P_2$$

Aus (iii) folgt, daß $P(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

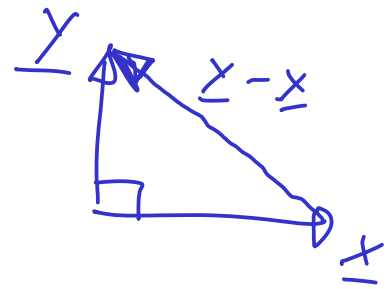
Es folgt, daß $P(\lambda)$ entweder keine oder eine doppelte (reelle) Nullstelle hat!

$$\Rightarrow \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle^2} - \frac{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} \leq 0 \quad , \text{ was}$$

die gesuchte Ungleichung implizit. $\blacksquare$

<u>Bemerkung</u>

·) Satz von Pythagoras:



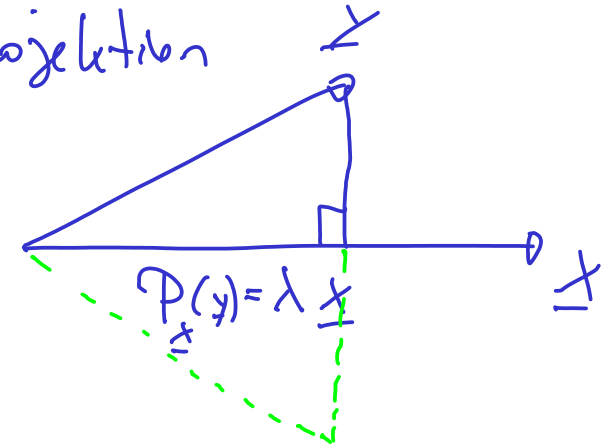
$\underline{x}, \underline{y}$ orthogonal

$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \|\underline{y} - \underline{x}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$$

·) Wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung macht die Winkeldefinition Sinn (weil immer $|\cos \sphericalangle_{\underline{x}, \underline{y}}| \leq 1$).

- orthogonale Projektion



Suche λ mit $\underline{y} - \lambda \underline{x} \perp \underline{x}$

oder $\langle \underline{y} - \lambda \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

$$\Rightarrow P_{\underline{x}}(\underline{y}) = \frac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} \underline{x}$$

$$= \underbrace{\frac{\underline{x}\underline{x}^T}{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underline{y}$$

- <u>Spiegelung</u> $S_{\underline{x}}(\underline{y}) = \underline{y} + 2(\lambda \underline{x} - \underline{y}) = 2 \dfrac{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} \underline{x} - \underline{y}$

$$= \left(2 \frac{\underline{x}\underline{x}^T}{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} - I \right) \underline{y}$$

<u>Das Skalarprodukt (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)</u>

<u>Definition</u> $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\underline{x}}^T \underline{y} = \overline{x}_1 y_1 + \dots + \overline{x}_n y_n \in \mathbb{C}$$

Eigenschaften ansonsten wie für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

<u>Definition</u> $\underline{q}^{(1)},\dots,\underline{q}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ heißen ·) <u>orthogonal</u>

wenn $\underline{q}^{(i)} \perp \underline{q}^{(j)}$ für $i \neq j$

·) <u>orthonormal</u>, wenn zusätzlich

$$\|\underline{q}^{(i)}\| = 1 \quad \text{für } i=1,\dots,k.$$

·) <u>Orthogonalbasis</u> (OB) falls orthogonal und $k=n$

·) <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) falls orthonormal und $k=n$

<u>Satz</u> i) $\underline{q}^{(1)},\dots,\underline{q}^{(k)}$ orthogonal $\Rightarrow$ $\underline{q}^{(1)},\dots,\underline{q}^{(k)}$ l.u.

ii) $\underline{q}^{(1)},\dots,\underline{q}^{(n)} \subseteq \mathbb{K}^n$ orthogonal $\Rightarrow$ Basis.

iii) $\underline{q}^{(1)},\dots,\underline{q}^{(n)}$ (OB) $\Rightarrow$ $\underline{x} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{q}^{(1)}\rangle}{\langle \underline{q}^{(1)}, \underline{q}^{(1)}\rangle}\underline{q}^{(1)} + \dots + \frac{\langle \underline{x}, \underline{q}^{(n)}\rangle}{\langle \underline{q}^{(n)}, \underline{q}^{(n)}\rangle}\underline{q}^{(n)}$

Koordinaten

<u>Beweis</u> i) $\sum x_i \underline{q}^{(i)} = \underline{0}$

orthogonal

$$\Rightarrow \left\|\sum x_i \underline{q}^{(i)}\right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 \|\underline{q}^{(i)}\|^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ii) klar

iii) $\underline{q}^{(1)}, \dots, \underline{q}^{(n)}$ ONB

$$\underline{x} = \sum y^i \underline{q}^{(i)} \quad \text{Koordinatendarstellung}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \underline{x}, \underline{q}^{(j)} \rangle = y^j \langle \underline{q}^{(j)}, \underline{q}^{(j)} \rangle$$

orthogonalität

$\blacksquare$

<u>Definition</u> $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt <u>orthogonal</u> wenn $Q^{-1} = Q^T$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sonst $\overline{Q}^T$ unitär)

Wir schreiben $O(n)$ für die Menge der orthogonalen Matrizen.

Längen- und Winkelerhaltung!

<u>Satz</u> $Q \in O(n) \Leftrightarrow \langle Q\underline{x}, Q\underline{y} \rangle \overset{!}{=} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

$\Leftrightarrow \quad \underline{q}^{(1)}, \dots, \underline{q}^{(n)}$ ist ONB

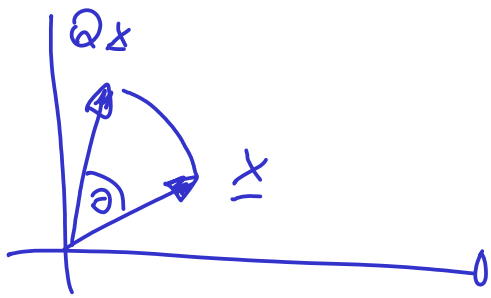
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$!

<u>Beweis</u>: $\langle Q\underline{x}, Q\underline{y} \rangle = \underline{x}^T Q^T Q \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y}$

$\blacksquare$

Beispiele:

$\mathbb{R}^2$: $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ Rotation



$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ Spiegelung um $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Exercise!

Generell bestehen orthogonale Matrizen aus Produkten von Rotationen und Spiegelungen.

Anwendung: Computergraphik.

Orthogonalisierung

Gegeben $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^n$

Suche $\underline{q}^{(1)}, \dots, \underline{q}^{(k)}$ orthonormal mit

$$\operatorname{span}\{\underline{q}^{(1)}, \dots, \underline{q}^{(k)}\} = \operatorname{span}\{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(\ell)}\}$$

Gram-Schmidt Algorithmus

$$\underline{q}^{(1)} = \frac{\underline{a}^{(1)}}{\|\underline{a}^{(1)}\|}$$

$$P_{\underline{q}^{(i)}}(\underline{a}^{(j)})$$

$$\|$$

for $j = 2, \dots, \ell$ {

$\underline{q}^{(j)} = \underline{a}^{(j)}$

for $i = 1, \dots, j-1$ { $\underline{q}^{(j)} \leftarrow \underline{q}^{(j)} - \langle \underline{a}^{(j)}, \underline{q}^{(i)} \rangle \underline{q}^{(i)}$ }

if $(\underline{q}^{(j)} = 0)$ then return

else $\underline{q}^{(j)} \leftarrow \dfrac{\underline{q}^{(j)}}{\|\underline{q}^{(j)}\|}$

end

Bsp

$$\underline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{9}{100} + \frac{100}{100} = \frac{110}{100} \quad \frac{\sqrt{110}}{10}$$

$$\Rightarrow \underline{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j=1$$

$$\underline{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad j=2$$

$$\underline{q}^{(2)} \leftarrow \underline{q}^{(2)} - \langle \underline{a}^{(2)}, \underline{q}^{(1)} \rangle \underline{q}^{(1)} \qquad i=1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{q}^{(2)} \leftarrow \frac{\underline{q}^{(2)}}{\|\underline{q}^{(2)}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{110}} \\ -\frac{3}{\sqrt{110}} \\ -\frac{10}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung

Satz Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $\operatorname{rang}(A) = k$ gibt es

(i) eine eindeutige Matrix $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $Q_0^T Q_0 = I_k$ und eine eindeutige Matrix $R_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ mit $(R_0)_{i,j} = 0$ wenn $i > j$ und $(R_0)_{i,i} > 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$ so daß

$$A = Q_0 \cdot R_0$$

$$\left(\underline{a}^{(1)} \middle| \cdots \middle| \underline{a}^{(k)} \right) = \left(\underline{q}^{(1)} \middle| \cdots \middle| \underline{q}^{(k)} \right) \left(\quad \right)$$

(ii) $Q \in O(n)$ $R \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $(R)_{i,j} = 0$ für $i > j$ und $(R)_{i,i} > 0$, so daß

$$A = QR$$

$$\left(\quad \right) = \left(\quad \right) \left(\quad \right)$$

Beweis Gram-Schmidt

Lineare Ausgleichsrechnung

Motivation $LGS(A;\underline{b})$

mit $\mathcal{L}(LGS(A;b)) = \emptyset$

Suche 'approximative Lösung' $\underline{x}$, welches das Residuum $r(\underline{z}) := \|A\underline{z} - \underline{b}\|$ minimiert.

Definition $\underline{x}$ heißt kleinste-quadrate-Lösung (KQL) von $LGS(A;\underline{b})$ falls

$$r(\underline{x}) = \min_{\underline{z} \in \mathbb{R}^n} r(\underline{z}).$$

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ Unterraum

$P_{\mathcal{U}}(\underline{x})$ = orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$, d.h.

$\underline{x} - P_{\mathcal{U}}(\underline{x}) \perp \mathcal{U}$, $\boxed{\text{d.h. } \forall \underline{u} \in \mathcal{U} : (\underline{x} - P_{\mathcal{U}}(\underline{x})) \perp \underline{u}}$

$\underline{q}^{(1)}, \dots, \underline{q}^{(k)}$ ONB von $\mathcal{U}$

Ansatz $P_{\mathcal{U}}(\underline{x}) = \sum \lambda_i \underline{q}^{(i)}$

$$\Rightarrow \left\langle \underline{x} - \sum \lambda_i \underline{q}^{(i)}, \underline{q}^{(j)} \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{q}^{(j)} \rangle = \lambda_j$$

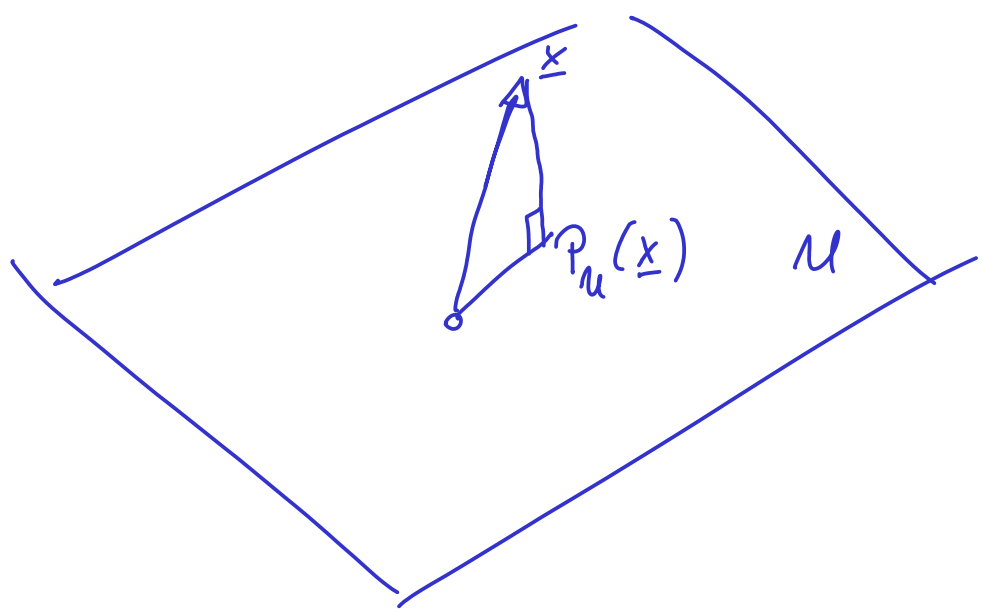
$$\Rightarrow P_{\mathcal{U}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \underline{x}, \underline{q}^{(i)} \rangle \underline{q}^{(i)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \underline{q}^{(i)} \left(\underline{q}^{(i)}\right)^T \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \underline{x}$$

<u>Satz</u> $\|\underline{x} - P_{\mathcal{U}}(\underline{x})\| = \min_{\underline{z} \in \mathcal{U}} \|\underline{x} - \underline{z}\|$

<u>Beweis</u> Pythagoras:

$$\underline{z} \in \mathcal{U} \Rightarrow \|\underline{x} - \underline{z}\|^2 = \|\underline{x} - P_{\mathcal{U}}(\underline{x})\|^2 + \|P_{\mathcal{U}}(\underline{x}) - \underline{z}\|^2 \quad \blacksquare$$



Satz Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) $\underline{x}$ ist KQL von $LGS(A;\underline{b})$

(ii) $\underline{x} \in \mathcal{L}(LGS(A; P_{Bild(A)}(\underline{b})))$

(iii) $A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$ ← Normalengleichung

Beweis (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus obigem Satz

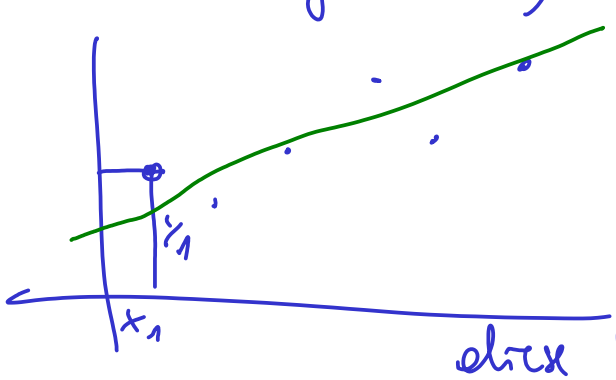
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

$$\underline{b} - A\underline{x} \perp Bild(A)$$

$$\Rightarrow A^T(\underline{b} - A\underline{x}) = \underline{0}$$

$\blacksquare$

Beispiel (lineare Regression)



Gegeben Datenpunkte (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$.

Suche Gerade die diese Messungen bestmöglich erklärt.

Gerade wird durch $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beschrieben:

$$\alpha + \beta x$$

Suche also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \quad \text{minimal}$$

$$\|$$

$$\left\| A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \underline{y} \right\|^2 \quad \text{mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2} \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Normalengleichungen:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{pmatrix} \qquad A^T \underline{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Sind die Normalengleichungen eindeutig lösbar?

<u>Satz</u> $\ker(A^T A) = \ker(A)$

$\Rightarrow$ Wenn A vollen rang hat sind Normalengleichungen <u>eindeutig</u> lösbar !

In obigen Beispiel nehmen wir an, daß <u>nicht</u> $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ gilt.

Dann sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u.

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ <u>eindeutig</u> bestimmt.

Berechnung der KQL durch QR Zerlegung:

<u>Satz</u> $\underset{\in \mathbb{R}^{m,n}}{A} = \underset{\in \mathbb{R}^{m,m}}{Q} \underset{\mathbb{R}^{m,n}}{R}$ wobei $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \Big\} R_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$

mit $\operatorname{rang}(A) = n$ und $Q = (\underbrace{Q_1}_{\mathbb{R}^{m,n}} | Q_2)$

Dann ist

$\underline{x} = R_1^{-1} Q^T \underline{b}$ die eindeutige KQL von $LGS(A; \underline{b})$.

Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$

Definition $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Satz i) $\langle \underline{x}, \underline{x} \times \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y} \rangle = 0$

ii) $\| \underline{x} \times \underline{y} \| = \| \underline{x} \| \| \underline{y} \| \sin(\measuredangle \underline{x}, \underline{y})$

= 'Volumen des von $\underline{x}, \underline{y}$ aufgespannten Parallelogramms'

Beweis i) $\langle \underline{x}, \underline{x} \times \underline{y} \rangle = x_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3)$

$+ x_2 (x_3 y_1 - x_3 y_1) + x_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$

ii) ohne Beweis

$\square$

Satz i) $\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$

ii) $(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) \times \underline{z} = \alpha \underline{x} \times \underline{z} + \beta \underline{y} \times \underline{z}$

iii) $\underline{x} \times (\alpha \underline{y} + \beta \underline{z}) = \alpha \underline{x} \times \underline{y} + \beta \underline{x} \times \underline{z}$

iv) $\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = \underline{y} \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle - \underline{z} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

Bemerkung $\underline{x} \mapsto \underline{x} \times \underline{y}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

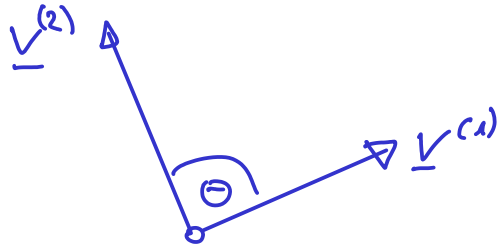
5. Determinanten

5.1 Motivation

Als Motivation versuchen wir das orientierte Volumen eines Parallelogramms in $\mathbb{R}^2$ zu berechnen.

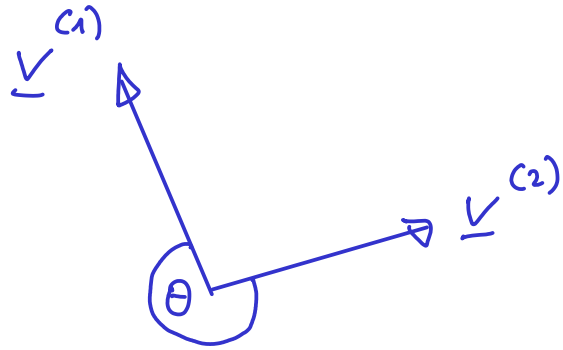
Definition •) $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ sind positiv orientiert falls $\sphericalangle_{\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}} \leq 180°$,

gegen den Uhrzeigersinn gemessener orientierter Winkel.



pos. or.

ansonsten negativ orientiert



•) $\Pi(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})$ das von $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ aufgespannte Parallelogramm; $|\Pi(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})|$ sein Volumen.

·) Wir definieren das orientierte Volumen als

$$\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) := \begin{cases} \left|\Pi\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right)\right| & \text{falls } \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)} \text{ pos. or.} \\ -\left|\Pi\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right)\right| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gesucht: Formel für $\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right)$.

<u>Satz</u> (i) $\mathrm{vol}\left(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}\right) = 1$

(ii) $\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) = -\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(1)}\right)$

(iii) $\mathrm{vol}\left(\alpha \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) = \alpha \cdot \mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right)$

(iv) $\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)} + \underline{w}\right) = \mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) + \mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{w}\right)$

für alle Vektoren $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$.

<u>Beweis</u> All das sind elementargeometrische Eigenschaften des Volumens $\blacksquare$

Wie bringt uns das unserem Ziel näher?

<u>Erkenntnis 1:</u> $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ l.a. $\Rightarrow \mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) = 0$.

<u>Beweis</u>: $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ l.a. $\Rightarrow \underline{v}^{(2)} = \alpha \underline{v}^{(1)}$ (oder umgekehrt)

$$\Rightarrow \mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\right) = -\mathrm{vol}\left(\underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(1)}\right) = -\mathrm{vol}\left(\alpha \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}\right)$$

$$= -\alpha \, \mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)})$$

Weiters: $\mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}) \overset{(ii)}{=} -\mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)})$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}) = 0$$

$\blacksquare$

<u>Erkenntnis 2</u> $\quad \mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}) = \det(\underline{v}^{(1)} | \underline{v}^{(2)})$.

<u>Beweis</u>

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = v_{1,1} \underline{e}^{(1)} + v_{2,1} \underline{e}^{(2)}$$

$$\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = v_{1,2} \underline{e}^{(1)} + v_{2,2} \underline{e}^{(2)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}) = \mathrm{vol}(v_{1,1} \underline{e}^{(1)} + v_{2,1} \underline{e}^{(2)}, v_{1,2} \underline{e}^{(1)} + v_{2,2} \underline{e}^{(2)})$$

$$\overset{\text{(iv) und (iii)}}{=} v_{1,1} v_{1,2} \, \mathrm{vol}(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(1)}) + v_{1,1} v_{2,2} \, \mathrm{vol}(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)})$$
$$+ v_{2,1} v_{1,2} \, \mathrm{vol}(\underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(1)}) + v_{2,1} v_{2,2} \, \mathrm{vol}(\underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(2)})$$

$$= v_{1,1} v_{2,2} - v_{1,2} v_{2,1}$$

weil $\mathrm{vol}(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}) = 1$ wegen (i)

$\mathrm{vol}(\underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(1)}) = -1$ wegen (ii)

$\mathrm{vol}(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(1)}) = \mathrm{vol}(\underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(2)}) = 0$ wegen Erkenntnis 1.

Wir halten fest: $|\Pi(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})| = |\det(\underline{v}^{(1)}|\underline{v}^{(2)})|$.

5.2 Determinantenform

<u>Definition</u> Wir definieren die Funktion

$$\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-Mal}} \to \mathbb{K}$$

$$(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) \mapsto \det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)})$$

durch die folgenden Eigenschaften:

(i) $\det(\underline{e}^{(1)}, \dots, \underline{e}^{(n)}) = 1$

(ii) $\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(j)}, \dots, \underline{v}^{(n)})$
$= -\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(j)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

(iii) $\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \alpha \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) = \alpha \det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(n)})$
$\forall \alpha \in \mathbb{K}$

(iv) $\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)} + \underline{w}, \dots, \underline{v}^{(n)}) =$
$\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) + \det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{w}, \dots, \underline{v}^{(n)})$

Wir müssen zeigen, daß det durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist.

Zunächst eine einfache Bemerkung:

<u>Lemma</u> Angenommen es gilt $\underline{v}^{(i)} = \underline{v}^{(j)}$ für $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.
Dann ist
$$\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(j)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) = 0$$

<u>Beweis</u> Nach (ii) gilt
$$\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(j)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) =$$
$$-\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(i)}, \dots, \underline{v}^{(j)}, \dots, \underline{v}^{(n)})$$ und daraus folgt die Behauptung. ∎

Um unser Hauptresultat zu det zu zeigen brauchen wir noch den Begriff der <u>Signatur einer Permutation</u>.

<u>Definition</u> Sei $(i_1, \dots, i_n)$ mit $i_1, \dots, i_2 \in \mathbb{N}$.
Die <u>Signatur</u> $\sigma(i_1, \dots, i_n)$ ist definiert durch
$$\sigma(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \exists\, k \neq j \text{ mit } i_k = i_j \\ 1 & \text{wenn } (i_1, \dots, i_n) \text{ durch eine gerade Anzahl an Vertauschungen aus } (1, 2, \dots, n) \text{ hervorgeht} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

$$\sigma(1,2,3) = 1$$
$$\sigma(1,1,3) = 0$$
$$\sigma(2,1,3) = -1$$

Lemma $\det(\underline{e}^{(i_1)}, \dots, \underline{e}^{(i_n)}) = \sigma(i_1, \dots, i_n)$

Beweis Wenn $\exists\, k, j$ mit $\underline{e}^{(i_k)} = \underline{e}^{(i_j)}$ dann verschwindet die Determinante nach dem vorigen Lemma. Der Rest folgt aus (i) und (ii) in der Definition von det. $\blacksquare$

Nun zu dem angekündigten Hauptresultat:

Satz Sei $\underline{v}^{(i)} = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $i = 1, \dots, n$.

Dann ist

$$\det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) = \sum_{i_n=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \sigma(i_1, \dots, i_n)\, v_{i_1,1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n,n}$$

Beweis Analog zu $d=2$ $\blacksquare$

Definition $A = (\underline{a}^{(1)} | \dots | \underline{a}^{(n)}) \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \det(A) := \det(\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)})$.

5.3 Eigenschaften

Satz (i) $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)}$ l.u. $\Leftrightarrow \det(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)}) \neq 0$

(ii) A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Satz (Rechenregeln)

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii) $\det(A^T) = \det(A)$

(iii) $\det(I_n) = 1$

(iv) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

(v) $Q \in O(n) \Rightarrow \det(Q) = \pm 1$

(iv) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

6. Lineare Abbildungen

Definition $\mathcal{F}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt linear falls $\mathcal{F}(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha \mathcal{F}(\underline{x}) + \beta \mathcal{F}(\underline{y})$

$\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Fragen Allgemeine Theorie?
Klassifizierung?

6.1 Abbildungsmatrix

Erkenntnis: Jede lineare Abbildung $\mathcal{F}$ kann als Matrixmultiplikation dargestellt werden.

Wähle Basis $\mathcal{B}^1 = \{\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)}\}$ von $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{B}^2 = \{\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(m)}\}$ von $\mathbb{K}^m$

Definition -) Sei $\mathcal{B}$ Basis von $\mathbb{K}^\ell$.

Die Abbildung $K_{\mathcal{B}}: \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}^\ell$ weist jedem Vektor seine Koordinaten in $\mathcal{B}$ zu.

-) Sei $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{F}$ wie oben.

Die Matrix

$$Z = \left(K_{\mathcal{B}^2}(F(\underline{a}^{(1)})) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, K_{\mathcal{B}^2}(F(\underline{a}^{(n)})) \right) \in K^{m \times n}$$

heißt <u>Matrixdarstellung</u> von F bezüglich der Basen $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$.

Wir schreiben

$$K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F) := Z.$$

<u>Satz</u> In Koordinaten $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$ wird F durch die Abbildung $\underline{x} \mapsto F_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F) \cdot \underline{x}$ beschrieben, d.h.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}^1}"'] & K^m \arrow[d, "K_{\mathcal{B}^2}"] \\
K^n \arrow[r, "\underline{x} \mapsto K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F) \cdot \underline{x}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Wir wollen für $\underline{a} \in K^n$ die Koordinaten von $F(\underline{a})$ in $\mathcal{B}^2$ ausrechnen.

·) Es gilt $\underline{a} = x_1 \underline{a}^{(1)} + \dots + x_n \underline{a}^{(n)}$ wobei

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = K_{\mathcal{B}^1}(\underline{a}).$$

·) Es gilt

Linearität!

$$F(\underline{a}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i F(\underline{a}^{(i)})$$

·) Es gilt (nach der Definition von $K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F) = (z_{j,i})$)

$$F(\underline{a}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{m} z_{j,i} \, b^{(i)}$$

·) Daher: $F(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} z_{j,i} \underline{b}^{(j)}$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} z_{j,i} x_i\right)}_{= (Z\underline{x})_j} \underline{b}^{(j)}$$

$\blacksquare$

Rechenregeln

Satz (i) F injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker\left(K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F)\right) = \{\underline{0}\}$

(ii) F surjektiv $\Leftrightarrow$ $\text{Bild}\left(K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F)\right) = \mathbb{K}^m$

(iii) F bijektiv $\Leftrightarrow$ $K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F)$ invertierbar

(iv) $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $G: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^\ell$ mit Basen $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3$ für $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m, \mathbb{K}^\ell$. Dann gilt

$$K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^3}(G \circ F) = K_{\mathcal{B}^2}^{\mathcal{B}^3}(G) \cdot K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F).$$

Basiswechsel

Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$\mathcal{B}^1, \tilde{\mathcal{B}}^1$ Basen von $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{B}^2, \tilde{\mathcal{B}}^2$ Basen von $\mathbb{K}^m$

mit Basiswechselmatrizen (siehe Kap. 4)

$$K_{\mathcal{B}^1}^{\tilde{\mathcal{B}}^1}(\mathrm{Id}) \quad \text{bzw} \quad K_{\mathcal{B}^2}^{\tilde{\mathcal{B}}^2}(\mathrm{Id}).$$

Satz $$K_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{\tilde{\mathcal{B}}_2}(F) = K_{\mathcal{B}^2}^{\tilde{\mathcal{B}}^2}(\mathrm{Id}) \cdot K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F) \cdot K_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id})$$

Beweis Folgt direkt aus (iv) des letzten Satzes ∎

Beachte, daß jede invertierbare Matrix als Basiswechselmatrix aufgefasst werden kann. Daher:

Satz Sei $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beide invertierbar und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Die Matrizen A und $\tilde{A} = RAS$ stellen dieselbe lineare Abbildung bezüglich unterschiedlicher Basen dar.

Selbstabbildungen

Spezialfall: Selbstabbildungen $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Wähle Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ von $\mathbb{K}^n$.

Es gilt $\quad K_{\mathcal{B}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(\mathrm{Id}) = \left(K_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\right)^{-1}$, daher

$$K_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(F) = \left(K_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\right)^{-1} K_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)\, K_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}).$$

<u>Satz</u> Sei $A, S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit S invertierbar.

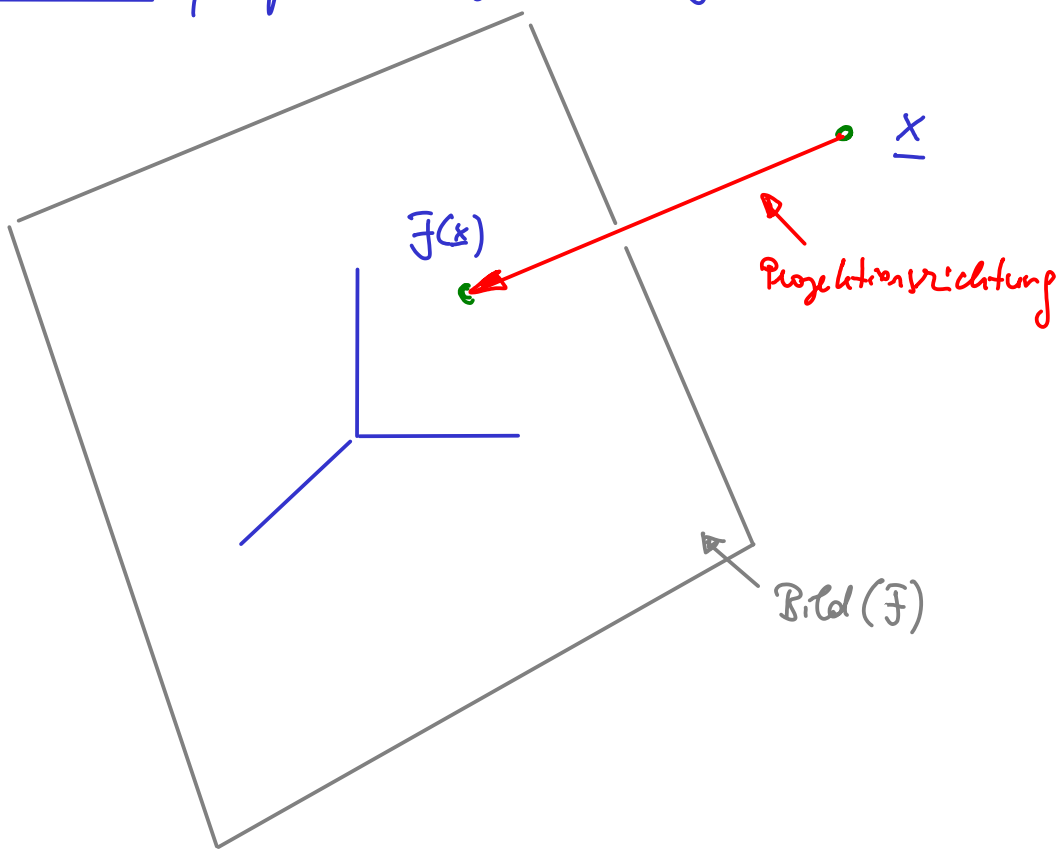
Dann stellen A und $S^{-1}AS$ dieselbe lineare Abbildung $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich verschiedener Basen dar.

<u>Definition</u> $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen <u>ähnlich</u>, falls $\tilde{A} = S^{-1}AS$ mit $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar.

6.2 Spezielle Lineare Abbildungen

Definition Eine lineare Selbstabbildung $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ heißt **Projektion**, falls $F \circ F = F$.

Bsp.



Konkret: Sei $U = \operatorname{span}\{\underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ 2-dim TR.
Sei $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ Projektionsrichtung.

Dann suchen wir für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ einen Punkt
$\underline{x} + \lambda \underline{w} \in U$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x} + \lambda \underline{w} = x_1 \underline{b}^{(1)} + x_2 \underline{b}^{(2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x} = \left(-\underline{w}, \underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)}\right) \begin{pmatrix} \lambda \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Annahme: $\underline{w}, \underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)}$ l.u.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(-\underline{w} \,|\, \underline{b}^{(1)} \,|\, \underline{b}^{(2)}\right)^{-1} \underline{x}$$

$$\Rightarrow F(\underline{x}) = \left(\underline{0} \,|\, \underline{b}^{(1)} \,|\, \underline{b}^{(2)}\right) \left(-\underline{w} \,|\, \underline{b}^{(1)} \,|\, \underline{b}^{(2)}\right)^{-1} \underline{x}$$

Wähle Basis $\mathcal{B} = \{\underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)}, \underline{w}\}$

Dann gilt

$$K_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Satz</u> Zu jeder Projektion F gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ mit

$$K_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Beweis</u> ·) Wähle Basis $b^{(1)}, \dots, b^{(r)}$ von $\mathrm{Bild}(F)$.

·) Ergänze durch $\underline{c}^{(r+1)}, \dots, \underline{c}^{(n)}$ zu Basis von $\mathbb{K}^n$

·) Definiere $\underline{b}^{(j)} := \underline{c}^{(j)} - F(\underline{c}^{(j)})$ $j = r+1, \dots, n$.

·) $\underline{b}^{(1)}, \dots, \underline{b}^{(n)}$ ist Basis von $\mathbb{K}^n$ mit

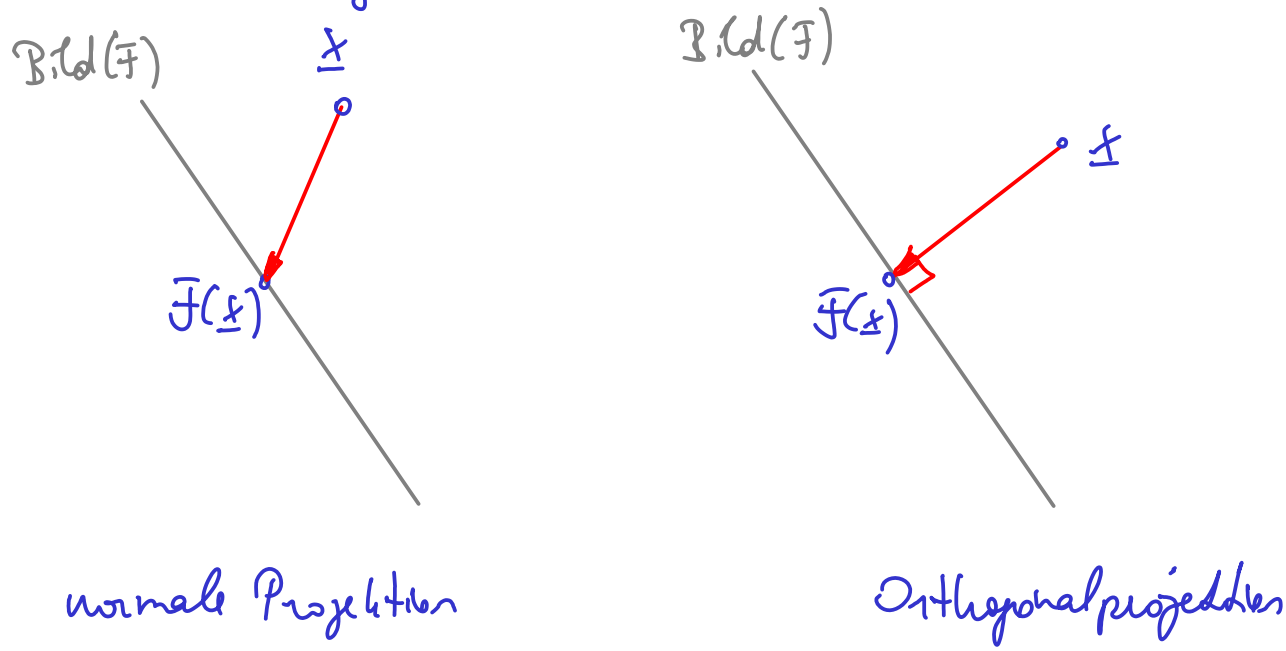
$F(\underline{b}^{(i)}) = \underline{b}^{(i)}$ $i = 1, \dots, r$

und
$F(b^{(i)}) = \underline{0}$ für $i = r+1, \dots, n$. ∎

<u>Definition</u> Eine Projektion $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ heißt <u>Orthogonalprojektion</u> falls

$$\underline{x} - F(\underline{x}) \perp \text{Bild}(F).$$

<u>Veranschaulichung</u>



normale Projektion Orthogonalprojektion

<u>Satz</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent für eine Projektion $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

(i) F ist Orthogonalprojektion

(ii) $\ker(F) \perp \text{Bild}(F)$

(iii) $\exists$ ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definition Eine lineare Abbildung $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>Isometrie</u>, falls

$$\|F(\underline{x})\| = \|\underline{x}\| \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Lemma Jede Isometrie ist injektiv.

Daraus folgt:

- $m \geq n$
- Für alle Basen $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$ für $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ gilt $\operatorname{Kern}(K_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^2}(F)) = \{\underline{0}\}$

Beweis Sei $F(\underline{x}) = F(\underline{y})$. Dann ist

$$\underline{0} = F(\underline{x}) - F(\underline{y}) = F(\underline{x} - \underline{y})$$

Es folgt $0 = \|\underline{0}\| = \|F(\underline{x} - \underline{y})\| \underset{F \text{ Isometrie}}{=} \|\underline{x} - \underline{y}\|$,

woraus $\underline{x} = \underline{y}$ folgt. ∎

Satz Für jede Isometrie gilt

$$\langle F(\underline{x}), F(\underline{y}) \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Beweis Nehmen wir an, F ist Isometrie.

Dann gilt: $\langle F(\underline{x}+\underline{y}), F(\underline{x}+\underline{y}) \rangle = \langle \underline{x}+\underline{y}, \underline{x}+\underline{y} \rangle$

$$\Rightarrow \langle F(\underline{x}), F(\underline{x})\rangle + 2\langle F(\underline{x}), F(\underline{y})\rangle + \langle F(\underline{y}), F(\underline{y})\rangle$$

$$= \underbrace{\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle}_{=\langle \underline{x},\underline{x}\rangle} + 2\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + \underbrace{\langle \underline{y}, \underline{y}\rangle}_{=\langle \underline{y},\underline{y}\rangle \text{ weil } F \text{ Isometrie}}$$

$$\Rightarrow \langle F(\underline{x}), F(\underline{y})\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle \qquad \blacksquare$$

<u>Korollar</u> Sei F Isometrie. Dann ist F winkelerhaltend.

<u>Korollar</u> Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Isometrie und $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$ ONBs von $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$.
Sei $A = K^{\mathcal{B}^2}_{\mathcal{B}^1}(F) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Dann gilt $A^T A = I_n$.
Wenn $m = n$, dann ist $A \in O(n)$.

7. Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierung

<u>Frage</u>: Sei $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ linear selbstadj.

Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

mit $A := \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$?

Anders gefragt: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Existiert $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar bzw. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

mit $S^{-1} A S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$?

<u>Anwendung 1</u> Sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_\ell t^\ell \in \mathcal{P}_\ell$.

$$\Rightarrow p(A) = p(S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S)$$

$$= S^{-1} \operatorname{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) S$$

$$\left[S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S\right]^k = S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) S$$

Gleiches gilt für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit konvergenter Taylorreihe, z. B.

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$$

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}$$

Anwendung 2 Lösungsformel von gewöhnlicher linearer homogener DGL

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underset{\in \mathbb{K}^{n\times n}}{A} \cdot \underset{\in \mathbb{K}^{n}}{\underline{x}}(t)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad \in \mathbb{K}^n$$

Satz

Die eindeutige Lösung ist durch

$$\underline{x}(t) = \exp(tA)\,\underline{x}_0 \quad \text{gegeben.}$$

Beweis Nehmen wir an $A = S^{-1} \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{\Lambda} A$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = S^{-1} \Lambda S\, \underline{x}(t) \Rightarrow S\dot{\underline{x}}(t) = \Lambda S\, \underline{x}(t)$$

Setze $\underline{y}(t) := S\underline{x}(t)$.

Dann gilt

$$\dot{\underline{y}}(t) = \Lambda \underline{y}(t) \quad \text{oder ausgeschrieben}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_1(t) = C_1 \exp(t\lambda_1) \\ \vdots \\ y_n(t) = C_n \exp(t\lambda_n) \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\exp(t\lambda_1), \dots, \exp(t\lambda_n)\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = S^{-1}\underline{y}(t) = S^{-1}\operatorname{diag}\left(\exp(t\lambda_1), \dots, \exp(t\lambda_n)\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Wie wählen wir $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$?

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = S^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = S\underline{x}_0 .$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \exp(tA)\,\underline{x}_0$$

$\blacksquare$

7.1 Eigenwerte

<u>Definition</u> Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

- $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt <u>Eigenwert</u> (EW) von A, falls $\operatorname{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$
- $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ heißt <u>Eigenvektor</u> (EV) von A zum EW λ, falls $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$
- $\operatorname{kern}(A - \lambda I_n)$ heißt <u>Eigenraum</u> (ER) von A zum EW λ.
- $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ EW von } A\}$ heißt <u>Spektrum</u> von A

Bemerkung Angenommen A ist diagonalisierbar, d.h.

$$A = S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S .$$

Dann sind die Eigenvektoren genau $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und die zugehörigen Spalten $\underline{t}^{(1)}, \dots, \underline{t}^{(n)}$ von S^{-1} die EVen.

Denn:
$$\begin{aligned} A\underline{t}^{(k)} &= S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S \underline{t}^{(k)} \\ &= S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underline{e}^{(k)} \\ &= \lambda_k S^{-1} \underline{e}^{(k)} = \lambda_k \underline{t}^{(k)} \end{aligned}$$

Korollar A diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Basis von $\mathbb{C}^n$ aus EVen

Wie können wir $\sigma(A)$ finden?

Idee: $\boxed{\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0}$

Wie sieht $\det(A - \lambda I_n)$ aus?

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$$

Wichtige Erkenntnis: $\det(A - \lambda I_n)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$ in λ!

Definition $\chi_A(t) := \det(A - tI_n) \in P_n$

heißt <u>charakteristischer Polynom</u> von A

Satz (i) $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_A(\lambda) = 0\}$

[$\Rightarrow$ Es gibt höchstens n EWe!]

(ii) $\chi_{S^{-1}AS} = \chi_A$

Beweis (i) haben wir schon

(ii) $\chi_{S^{-1}AS}(t) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1} I_n S)$

$= \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)S) = \det(S)^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det(S)$

$= \chi_A(t)$ $\blacksquare$

Satz Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \sigma(A)$ paarweise verschieden mit EVen $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}$.

Dann sind $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}$ l.u.

Beweis Induktion. $k = 1$ ✓

Ang. $x_1 \underline{v}^{(1)} + \dots + x_{\ell+1} \underline{v}^{(\ell+1)} = \underline{0}$, $(x_1, \dots, x_{\ell+1}) \neq \underline{0}^T$

$\Rightarrow x_1 \lambda_1 \underline{v}^{(1)} + \dots + x_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} \underline{v}^{(\ell+1)} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \quad x_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \underline{v}^{(1)} + \dots + x_\ell \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1})}_{\neq 0} \underline{v}^{(\ell)} = \underline{0} \quad ↯$$

$\blacksquare$

<u>Korollar</u> Angenommen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n verschiedene EWe (Äquivalent: χ_A hat nur einfache Nullstellen). Dann ist A diagonalisierbar

<u>Beweis</u> Seien $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(n)}$ die EVen.
Nach dem vorigen Satz sind diese l.u.
$\Rightarrow$ Es gibt Basis aus EVen
$\Rightarrow$ A diagonalisierbar

$\blacksquare$

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) + 1$$

$$= 3 - 3\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{12}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \left\{ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Zugehörige EVen: •) $\ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

•) $\ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis aus EVen}$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{K_{\mathcal{B}}^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1}}_{K_{\mathcal{B}}}$$

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{1\}$$

zugehörige EVen:

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \nexists$ Basis aus EVen $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar.

Definition Sei $\lambda \in \sigma(A)$ eine Nullstelle von χ_A der Vielfachheit $\mu_a(\lambda)$. Dann heißt $\mu_a(\lambda)$ die <u>algebraische Vielfachheit</u> des EWs λ. Die Größe $\mu_g(\lambda) := \dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda I))$ heißt <u>geometrische Vielfachheit</u> des EWs λ

Satz
- $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$
- $\sum_\lambda \mu_a(\lambda) = n$
- $\sum \mu_g(\lambda) = n \Leftrightarrow A$ diagonalisierbar

Definition Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, dann ist die <u>hermitesche Transponierte Matrix</u> $A^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ definiert durch $(A^H)_{i,j} = \overline{(A)_{j,i}}$.
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt <u>normal</u> falls $A^H A = A^H A$.

Bsp $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist normal

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schief-symmetrisch ($A^T = -A$) ist normal

$A \in \mathcal{O}(n)$ ist normal

Definition $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt <u>unitär</u> falls

$$A^H A = I_n .$$

Bsp. $A \in O(n) \Rightarrow A$ unitär

A unitär $\Leftrightarrow$ Spalten von A sind ONB

Satz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal $\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $A = U^H \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U$

Beweis '$\Rightarrow$' ist zu kompliziert

'$\Leftarrow$' Sei $A = U^H \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U$

$$\Rightarrow A^H A = U^H \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \underbrace{U U^H}_{= I_n} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U$$

$(U^H)^H = U$; $(AB)^H = B^H A^H$

$$= U^H \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) U$$

$$A A^H = U^H \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U U^H \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) U$$

$$= U^H \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) U$$

$$\Rightarrow A A^H = A^H A$$

$\blacksquare$

Interpretation A normal $\Leftrightarrow$ Die lineare Abbildung $F: \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ erfüllt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für ein ONB $\mathcal{B}$.

<u>Spezialfall:</u> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch

<u>Lemma</u> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt

(i) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen EWen sind orthogonal

<u>Beweis</u> Vorbereitung:

Sei $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ und $\underline{u}, \underline{v}$ EVen,
d.h. $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$ und $A\underline{v} = \mu \underline{v}$

$$\Rightarrow \mu \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \mu\, \overline{\underline{u}}^T \underline{v} = \overline{\underline{u}}^T (\mu \underline{v}) = \overline{\underline{u}}^T A \underline{v}$$

$$= \overline{\underline{u}}^T \overline{A}^T \underline{v} = \overline{(A\underline{u})}^T \underline{v} = (\overline{\lambda}\, \overline{\underline{u}})^T \underline{v} = \overline{\lambda} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

A symmetrisch

$$\Rightarrow (\mu - \overline{\lambda}) \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0 \qquad (*)$$

(i) $\lambda = \mu$, $\underline{u} = \underline{v}$ in $(*)$

$$\Rightarrow (\mu - \overline{\mu}) \|\underline{u}\|^2 = 0 \Rightarrow \mu = \overline{\mu} \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}.$$

(ii) Because of (i) we have for $\lambda \neq \mu$ that $\overline{\lambda} = \lambda$ and therefore $(*)$ yields

$(\lambda - \mu) \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$ which implies $\underline{u} \perp \underline{v}$ if $\lambda \neq \mu$. ∎

Satz Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

Dann existiert $S \in O(n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$A = S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S$$

Spezialfall Projektion $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ with $P^2 = P$.

Satz Jede Projektion ist diagonalisierbar und $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$

Beweis Schon bewiesen in Kapitel 6. $\blacksquare$

Satz

Sei A diagonalisierbar und $\varphi : D \to \mathbb{C}$.

$$\sigma(A) \subseteq D \Rightarrow \sigma(\varphi(A)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Beweis $A = S^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S \qquad \varphi(x) = \sum a_n x^n$

$$\Rightarrow \varphi(A) = S^{-1} \operatorname{diag}(\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)) S$$ $\blacksquare$

Korollar $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär $\Rightarrow |\lambda| = 1 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$

Beweis $\varphi(x) = |x|^2 = \bar{x} x \qquad \varphi(A) = A^H A$ $\blacksquare$

7.2 Singulärwertzerlegung

Satz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann existieren

- $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$ unitär
- $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär
- $\Sigma \in \mathbb{K}^{m \times n}$ diagonal mit nichtnegativen Einträgen.

mit

$$A = U \Sigma V^H$$

Bemerkung Relation zu Diagonalisierung:

$B := A^H A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist normal $(B^H B = B B^H)$

$$\Rightarrow B = V(\Sigma^H \Sigma) V^H$$

$C := A A^H \in \mathbb{K}^{m \times m}$ ist normal

$$\Rightarrow C = U(\Sigma^H \Sigma) U^H$$

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 1$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = V(\Sigma^T \Sigma) V^T \Rightarrow \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung von $C = AA^T$ gibt

$$C = U(\Sigma \Sigma^T) U^T$$