Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit Taschenrechner) gelösten Aufgaben: **Freitag 5. Januar 2007**

1. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt eine **Lissajous-Kurve** γ (Figur 1):

$$\gamma: \ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(Die nach dem frz. Physiker J. A. Lissajous benannten Figuren entstehen z. B. durch ein Pendel, das gleichzeitig in zwei zueinander senkrechte Richtungen schwingt. Die über den Sand streichende Pendelspitze zeichnet dann eine für das Frequenzverhältnis charakteristische Lissajous-Figur.)

   (a) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Ursprung durchdringt.

   (b) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sie sich im Ursprung durchdringt.

   (c) Berechnen Sie die Abszisse (den x-Wert) der beiden Punkte, die am weitesten rechts liegen. (Tipp: Welche Form hat dort der Tangentialvektor?)

2. Wenn sich zwei Gänge mit **Tonnengewölben** kreuzen, durchdringen sich zwei Halbzylinder mit gleichen Radien, deren Achsen sich senkrecht schneiden. Seien die x-Achse und die y-Achse die Achsen der beiden Halbzylinder, ihr Radius sei r. Die **Schnittkurven** der Halbzylinder werden dann beschrieben durch:

$$\gamma_{1,2}: \ [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} r\cos t \\ -r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen, dass γ_1 und γ_2 (Halb-)Ellipsen mit den Halbachsen $r\sqrt{2}$ und r sind, die einander in den Nebenscheiteln rechtwinklig schneiden.

   (a) Skizzieren Sie Halbzylinder, Schnittkurven im räumlichen Koordinatensystem.

   (b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ von γ_1 von der x-Achse bzw. von der y-Achse Abstand r hat. (D.h. er liegt auf beiden Halbzylindern.)

   (c) Skizzieren Sie die Projektionen von γ_1, γ_2 auf die (x, y)-Ebene (Grundrisse) in ein ebenes Koordinatensystem. Um was für Kurven handelt es sich?

   (d) Welchen Neigungswinkel bezüglich der Vertikalen hat die Kurve γ_1 auf halber Höhe des Gewölbes? (Zur Vereinfachung der Rechnung kann $r = 1$ gesetzt werden.)

3. Die Punkte $A(2, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $O(0, 0, 0)$ legen eine **Pyramide** mit der dreieckigen 'Grundfläche' ABC fest. Die Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke!

   (a) Skizzieren Sie die Pyramide $ABCO$ in ein räumliches Koordinatensystem.

   (b) Berechnen Sie zu jeder Dreiecksfläche den nach aussen gerichteten Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \vec{OC} \times \vec{OB}$, $\vec{n}_2 = \vec{OA} \times \vec{OC}$, $\vec{n}_3 = \vec{OB} \times \vec{OA}$, $\vec{n}_G = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

   (c) Für den Flächeninhalt F eines beliebigen von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt: $F = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Begründen Sie kurz diese Formel.

   (d) Berechnen Sie mithilfe von (b), (c) die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3 der drei Seitenflächen und jenen, F_G, der Grundfläche und zeigen Sie, dass der **räumliche Satz des Pythagoras** gilt: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_G^2$.
   (Der räumliche Satz des Pythagoras gilt allgemein für eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, deren Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind.)

Bitte wenden!

Übungsserie 2

4. Gegeben sind $P_1(a,b,c)$, $P_2(a,c,b)$, $P_3(b,a,c)$, $P_4(b,c,a)$, $P_5(c,a,b)$, $P_6(c,b,a)$.
(Es wird angenommen, dass die Zahlen a, b, c verschieden von null sein sollen.)

   (a) Zeigen Sie, dass alle **sechs Punkte** denselben Abstand vom Ursprung haben.

   (b) Sei $\vec{n} = (1;1;1)$ und $M = (d,d,d)$ mit $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}$ zu den Vektoren $\vec{MP_1}, \vec{MP_2} \ldots, \vec{MP_6}$ jeweils senkrecht steht.

   (c) Begründen Sie durch geometrische Interpretation von (a) und (b), dass alle sechs Punkte auf einem Kreis liegen.

5. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt eine **Fläche** S, ein **Konoid**:

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi \, , \, 0 \le t \le 1)$$

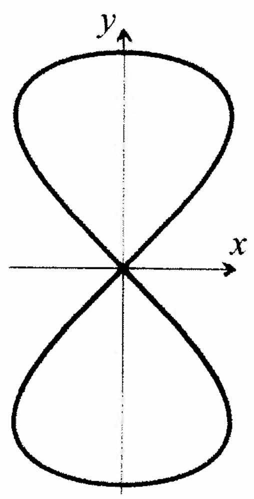
   (a) Skizzieren Sie S in ein räumliches Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?

   (b) Skizzieren Sie den Umriss der Fläche bei Betrachtung entlang der x-Achse bzw. entlang der y-Achse bzw. entlang der z-Achse.

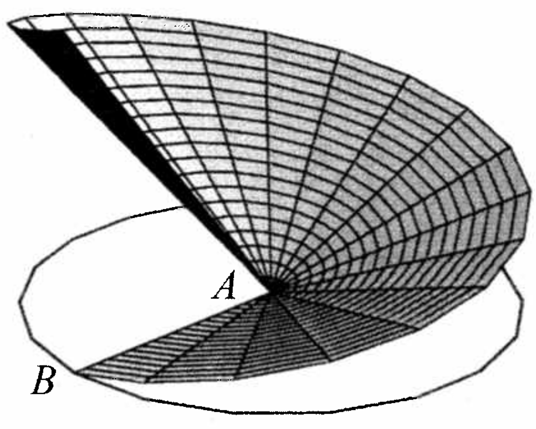
6. Figur 2 zeigt eine **kegelähnliche Fläche** S mit 'Spitze' A. Sie entsteht, wenn man eine (ausziehbare) Stange, welche stets durch die Spitze A geht, an einer Schraubenlinie entlangführt. Der Grundriss der Fläche ist ein Kreis vom Radius R, der Höhenunterschied ist h.

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche mit den Parametern φ und t.

   (b) Was für Kurven sind die φ-Linien bzw. die t-Linien?

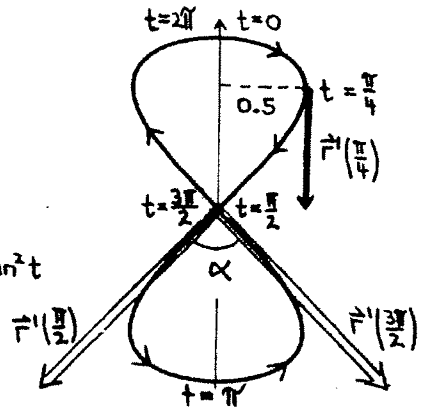


Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 6)

Übungsserie 2 WS 06/07, Seite 1



① (a) $\begin{pmatrix}\sin t\cos t\\ \cos t\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$ oder $t_2 = \frac{3\pi}{2}$

in $x(t) = \sin t \cos t$: $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = 0$

d.h. $\underline{\underline{\vec r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}}$ <u>Selbstdurchdringung!</u>

(b) $x(t) = \underset{f}{\sin t}\,\underset{g}{\cos t}$, $x'(t) = \underset{f'}{\cos t}\cdot\underset{g}{\cos t} + \underset{f}{\sin t}\,\underset{g'}{(-\sin t)} = \cos^2 t - \sin^2 t$

$y(t) = \cos t$ $\qquad y'(t) = -\sin t$

Tangentialvektor: $\vec r\,'(t) = \begin{pmatrix}\cos^2 t - \sin^2 t\\ -\sin t\end{pmatrix}$

in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bei $t_1 = \frac{\pi}{2}$: $\vec r\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, bei $t_2 = \frac{3\pi}{2}$: $\vec r\,'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

Zwischenwinkel α:

$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt2\cdot\sqrt2} = 0$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 90^\circ}}$

(c) $\vec r\,'(t) = \begin{pmatrix}\cos^2 t - \sin^2 t\\ -\sin t\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}0\\ \dots\end{pmatrix}$ vertikal!

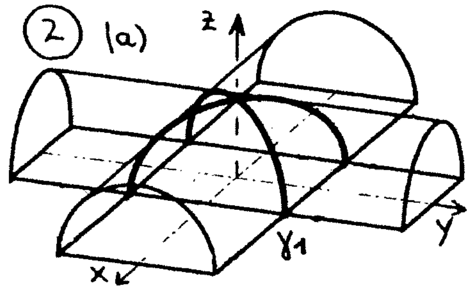
z.B. $\cos t = \sin t$

$\rightsquigarrow t = \frac{\pi}{4}$ (erraten oder $/{:}\cos t \to 1 = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$)

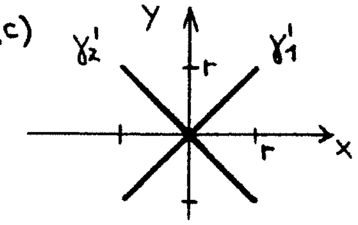
$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

---

② (a)



(c)



γ_1': $\vec r(t) = \begin{pmatrix}r\cos t\\ r\cos t\\ 0\end{pmatrix}\Big\}\ y = x$

$\rightsquigarrow$ <u>Strecke!</u>

(b) $\vec r(t) = \begin{pmatrix}r\cos t\\ r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix}$

Abstandsvektor von der x-Achse

$\vec r_x = \begin{pmatrix}0\\ r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix} \leftarrow$ kein x-Unterschied

$|\vec r_x| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}$

$|\vec r_x| = r\underbrace{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}_{=1} = \underline{\underline{r}}$

Abstandsvektor von der y-Achse

$\vec r_y = \begin{pmatrix}r\cos t\\ 0\\ r\sin t\end{pmatrix} \leftarrow$ kein y-Unterschied

$|\vec r_y| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \underline{\underline{r}}$

(d) Halbe Höhe: $z(t) = r\sin t \overset{\text{soll}}{=} \frac{1}{2}r$, d.h. $\sin t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow t = \frac{\pi}{6}$

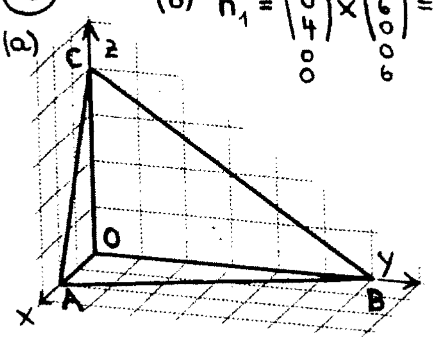
$\left.\begin{array}{l}\vec r\,'(t) = \begin{pmatrix}r(-\sin t)\\ r(-\sin t)\\ r\cos t\end{pmatrix} \underset{r=1}{\overset{t=\frac{\pi}{6}}{=}} \begin{pmatrix}-0.5\\ -0.5\\ \sqrt3/2\end{pmatrix}\\ \text{Vertikale: } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\\ \sqrt3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\left(\ {}''\ \right)\right|\cdot 1} = \dfrac{\sqrt3/2}{\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot 1}$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 39.29^\circ}} \neq 45^\circ$

---

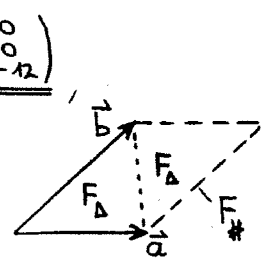
③

(a)



(b) $\vec n_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec n_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec n_3 = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}}}$,

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec n_G = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix}}}$



(c) Für das von $\vec a, \vec b$ aufgespannte Parallelogramm: $F_\# = |\vec a\times\vec b|$

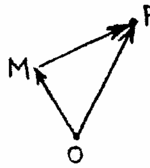
Dreieck: $F_\Delta = \frac{1}{2}F_\# = \frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|$

(d) $F_1 = \left|\begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \underline{24}$, $F_2 = \left|\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\right| = \underline{8}$, $F_3 = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}\right| = \underline{12}$

$F_G = \left|\begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{24^2 + 8^2 + 12^2} = \underline{\underline{28}}$, es ist $24^2 + 8^2 + 12^2 = 28^2$ ✓

④ (a) $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ebenso ist $|\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = \dots = |\overrightarrow{OP_6}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

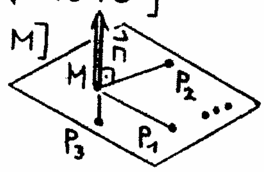
(b) $\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}(a+b+c)\\ '' \\ ''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\,a - 1/3\,b - 1/3\,c\\ 2/3\,b - 1/3\,a - 1/3\,c\\ 2/3\,c - 1/3\,a - 1/3\,b\end{pmatrix}$ analog für $\overrightarrow{MP_2}, \dots, \overrightarrow{MP_6}$ nur mit vertauschten Komponenten



$\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{MP_1} = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c\right) + \left(\frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) = 0 \rightsquigarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{MP_1}$

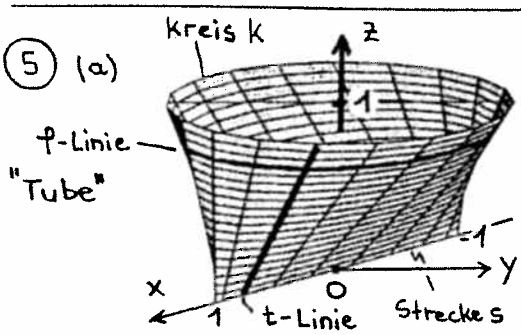
ebenso ist $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP_2} = 0, \dots, \vec{n}\cdot\overrightarrow{MP_6} = 0$ also $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP_2}, \dots, \overrightarrow{MP_6}$

(c) Gemäss (a) liegen $P_1, \dots, P_6$ auf einer Kugel [um (0,0,0) mit Radius $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$]
gemäss (b) liegen $P_1, \dots, P_6$ in einer Ebene [senkrecht zu $\vec{n}$ durch den Punkt M]
der Schnitt von einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis!
d.h. $P_1, \dots, P_6$ liegen auf einem Kreis [Kreismittelpunkt ist M]



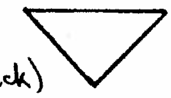
---

⑤ (a)



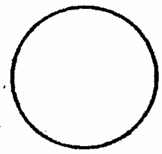
t-Linien: Geradenstücke (parallel (y,z)-Ebene)
φ-Linien: Ellipsen um die z-Achse

(b) Entlang x-Achse: (gleichschenkl. Dreieck)



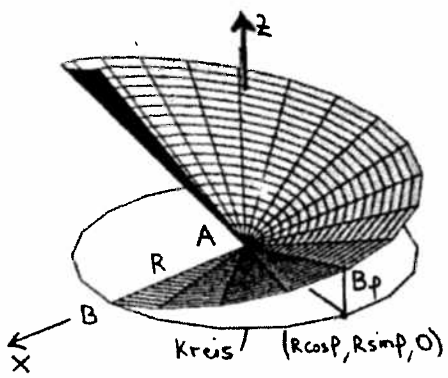
Entlang y-Achse: (Rechteck)

Entlang z-Achse (Kreis)



---

⑥



Koordinatensystem:
(a) x-Achse: durch A und B verlaufend, Ursprung in A
z-Achse: Schraubachse der Schraubenlinie

Dreht sich "B" einmal rundherum um die z-Achse, betragen die Verschiebung h und der Drehwinkel 2π; dementsprechend entspricht dem Drehwinkel φ eine Verschiebung um $\frac{h}{2\pi}\varphi$. Also gilt:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \mathrel{\hat=} h \\ 1 \mathrel{\hat=} \frac{h}{2\pi} \\ \varphi \mathrel{\hat=} \frac{h}{2\pi}\cdot\varphi \end{array}\right.$$

$$B_\varphi\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi, \frac{h}{2\pi}\varphi\right)$$

B_φ beschreibt für $\varphi = 0$ bis 2π eine Schraubenlinie!

Um eine Linie AB_φ zu 'zeichnen' ist ein Parameter t nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec{r}$ auf der Linie AB_φ gilt:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB_\varphi} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}R\cos\varphi - 0\\ R\sin\varphi - 0\\ \frac{h}{2\pi}\varphi - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tR\cos\varphi\\ tR\sin\varphi\\ t\frac{h}{2\pi}\varphi\end{pmatrix}$$

Also: $$(\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix}tR\cos\varphi\\ tR\sin\varphi\\ \frac{h}{2\pi}\varphi\, t\end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1)$$

(b) φ-Linien (t fest, φ variiert): Schraubenlinien mit der z-Achse als Schraubachse, Radius t
t-Linien (φ fest, t variiert): Geradenstücke (Mantellinien), durch A verlaufend