Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — SS 2007

Übungsserie 3

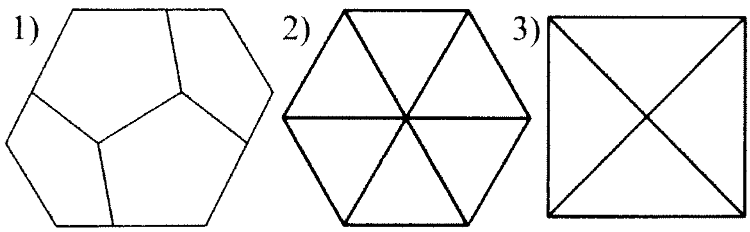
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 27. April 2007** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

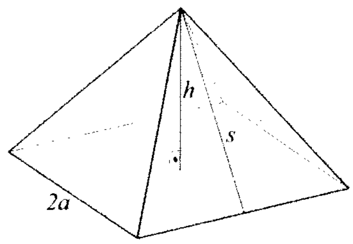
   (a) Die drei Abbildungen in Figur 1 zeigen besondere Ansichten von Drahtmodellen **Platonischer Körper**. Um welchen regulären Körper handelt es sich jeweils? (Alle Möglichkeiten angeben!)

   (b) Man kann aus den 8 Ecken eines Würfels 4 so auswählen, dass sie ein reguläres Tetraeder bilden. Skizzieren Sie einen Würfel mitsamt Tetraeder. Die 6 Seitenflächenmitten eines Würfels bilden ein reguläres Oktaeder. Skizzieren Sie einen Würfel mitsamt Oktaeder.

   (c) Wieviele verschiedene **Symmetrieebenen** besitzt ein Würfel, wieviele ein reguläres Tetraeder und wieviele ein reguläres Oktaeder?



Figur 1 (Aufgabe 1a)



Figur 2 (Aufgaben 2a, 2b)

2. (a) Von einer geraden **Pyramide** mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $2a$ (Figur 2) wird auf halber Höhe h parallel zur Grundfläche die Spitze abgeschnitten. Anschliessend wird durch die quadratische Deckfläche des entstandenen Pyramidenstumpfs senkrecht nach unten ein quadratisches Loch gleicher Grösse bis zur Grundfläche ausgebohrt. Welchen Bruchteil des Volumens der ursprünglichen Pyramide besitzt dann der durchbohrte Pyramidenstumpf?

   (b) Die **Cheops-Pyramide** ist eine Pyramide mit quadratischem Grundriss (Figur 2). Die Höhe der dreieckigen Seitenflächen werde mit s bezeichnet. Der römische Schriftsteller HERODOT schreibt, dass ihm die ägyptischen Priester über die Form der Cheops-Pyramide die Angaben gemacht hätten, das Quadrat über ihrer Höhe h sei einem Seitendreieck flächengleich. Wie gross ist dann das Verhältnis der Seitenflächenhöhe s zur halben Grundrissquadratlänge a? Um was für ein Verhältnis handelt es sich? (Setzen Sie zur Vereinfachung $a := 1$)

3. Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind.

   (a) Zeichnen Sie einen solchen Körper bestehend aus zwei Fünfecken und fünf Quadraten.

   (b) Zeigen Sie durch Überprüfen aller Möglichkeiten, dass bei solchen Polyedern, die nur aus lauter Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind, in jeder Ecke nicht mehr als drei Kanten zusammenstossen können. (D.h. solche Polyeder besitzen nur dreikantige Ecken.)

   (c) Bestimmen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung über die Anzahl Quadrate und die Anzahl Fünfecke eines solchen Körpers. Zählen Sie alle möglichen Lösungen dieser Bedingung (Gleichung) in einer kleinen Tabelle auf.

Übungsserie 3

4. Gegeben ist ein **rechtwinkliges Dreieck** mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c.

   (a) Skizzieren Sie ein solches Dreieck (im Folgenden bezeichnet als Grunddreieck) mit $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm und errichten Sie gegen aussen über a bzw. b je ein Seitendreieck, welches eine massstäbliche Verkleinerung des Grunddreiecks ist und die Grunddreieckseite a, respektive b, als Hypotenuse besitzt.

   (b) Berechnen Sie die Flächenverhältnisse von Seitendreieck und Grunddreieck für das Zahlenbeispiel $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm sowie allgemein für a, b und c.

   (c) Beweisen Sie mithilfe von (b) den Satz des Pythagoras.

5. (a) Wird ein rechteckiges **Blatt Papier** an seinen zwei Breitseiten zusammengeklebt (und auf den unendlich grossen, horizontalen Boden gestellt), umschliesse es ein Zylindervolumen von $1.5\,l$ Inhalt. Nun kann das Blatt Papier auch parallel zu den Längsseiten in lauter gleich breite Streifen unterteilt werden, welche alle an ihren Breitseiten zu einem Riesenstreifen zusammengeklebt wiederum ein Zylindervolumen umschliessen.
   (i) Ist es möglich, so den Volumeninhalt des Bodensees (48 km^3) zu umschliessen?
   (ii) Wenn ja, in wie viele Streifen müsste dann das Blatt Papier unterteilt werden?

   (b) Der **Mensch** (75 kg) nimmt täglich etwa den fünfzigsten Teil seines Eigengewichts an Nahrung zu sich. Die tägliche Nahrung benötigen wir, um unsere Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Angenommen, die Nahrung liefere gerade so viel Energie, um die durch die Körperoberfläche freigesetzte Wärme wieder auszugleichen. (i) Den wievielten Teil seines Eigengewichts muss dann ein massstäblich um den Faktor 8 vergrösserter Mensch zu sich nehmen? (ii) Eine Vergrösserung des Eigengewichts um den Faktor k bedeutet eine Vergrösserung der Nahrungsaufnahme um den Faktor k^p. Wie gross ist p?

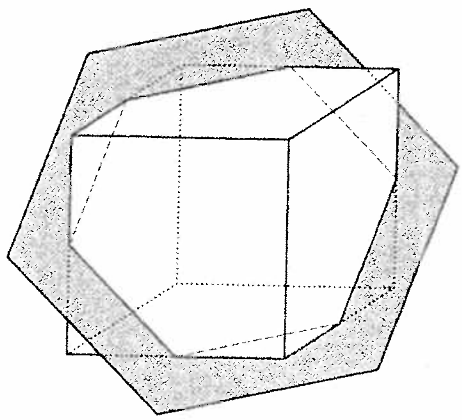
6. Ein **Würfel** mit der Kantenlänge a kann mit einem Kragen versehen werden (Figur 3), ... welcher nicht abgenommen werden kann! (Die Innenkanten des Kragens verlaufen geradlinig entlang Verbindungen von Kantenmitten des Würfels.)

   (a) Was für eine Figur bilden die Innenkanten des Kragens? (Seitenlänge angeben)

   (b) Welchen Flächeninhalt weist das Loch des Kragens auf?

   (c) Die Kragenbreite (Abstand zwischen paralleler Innen- & Aussenkante) betrage ein Viertel des Lochdurchmessers (Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden, parallelen Innenkanten). Wie gross ist dann der Flächeninhalt des Kragens?

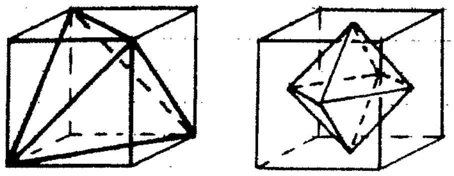
   (d) Geschenkpackung: Bezeichne P das kleinste konvexe Polyeder, welches Würfel samt Kragen (Figur 3) umgibt. Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Flächen und Kanten der 'Verpackung' P und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.



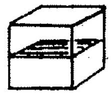
Figur 3 (Aufgabe 6)

(1) (a) 1) Dodekaeder 2) Würfel (Betrachtung entlang Körperdiagonale, vgl. Skript Figur 2.92) 3) Oktaeder (von oben) oder Tetraeder (in der Mitte eine Kante vorne, die andere hinten)

(b)



(c)

Typ:	Mittelebene	Diagonalebene	Total Anzahl Symm.ebenen
			
Würfel	3 Mögl.	6 Mögl.	9
Tetraeder	0	6	6
Oktaeder	3	6	9

(2) (a) Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot h = \underline{\frac{4}{3}a^2 \cdot h}$,

auf halber Höhe ist $a' = \frac{1}{2}a$, $h' = \frac{1}{2}h$

Volumen Spitze: $V' = \frac{1}{3}(2a')^2 \cdot h' = \frac{4}{3}a'^2 \cdot h' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{2}h = \underline{\frac{1}{6}a^2 \cdot h}$ $\left(= \frac{1}{8}V\right)$

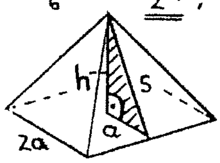
Volumen Loch: $V_L = (2a')^2 \cdot h' = 4a'^2 \cdot h' = 4 \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{2}h = \underline{\frac{1}{2}a^2 \cdot h} = \frac{3}{6}a^2 h$

$\left.\right\} + \; = \frac{4}{6}a^2 \cdot h$

Volumen durchbohrter Stumpf: $V - V' - V_L = \frac{4}{3}a^2 \cdot h - \frac{4}{6}a^2 h = \frac{4}{6}a^2 h = \underline{\underline{\frac{1}{2}V}}$, die Hälfte!

(b) Fläche Seitendreieck: $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot s = a \cdot s \underset{a=1}{=} s \overset{\text{Soll}}{=} h^2$ ①

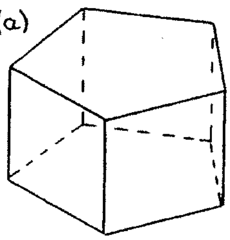
Pythagoras im $\underline{h}$-Dreieck: $s^2 = a^2 + h^2 \underset{a=1}{=} 1 + h^2$ ②



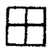
① in ②: $s^2 = 1 + s \leftrightarrow s^2 - s - 1 = 0$, $s = \underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ↯}\right)$

Verhältnis des Goldenen S.: $\frac{s}{a} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

(3) (a)



(b) Innenwinkel im Quadrat: $90°$, im reg. Fünfeck: $\frac{1}{5}(5-2) \cdot 180° = 108°$

Mehr als 3 Kanten bedeutet in einer Eckfigur stossen mehr als 3 Flächen zusammen, im "günstigsten" Fall 4 Quadrate:  $4 \cdot 90° = 360°$!
$(108° > 90°)$
Dies ist <u>keine Eckfigur</u> und alle weiteren Fälle erst recht nicht.
(Zusatz: Möglich sind 3 5-Ecke, 2 5-Ecke & 4-Eck, 5-Eck & 2 4-Ecke, 3 4-Ecke)

(c) f_4; f_5: Anzahl Quadrate bzw. reguläre 5-Ecke; $e - k + f = 2$ Eulersche Polyederformel

① $3e = 2k$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen (siehe (b)), jede Kante wird dabei zweimal gezählt)

② $4f_4 + 5f_5 = 2k$ (Jede 4-Eckfläche hat 4 Kanten, jede 5-Eckfläche 5; jede Kante wird 2× gezählt)

③ $f_4 + f_5 = f$

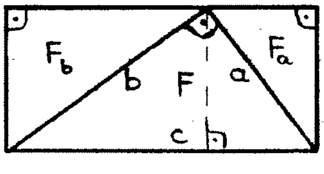
$\underline{2} = e - k + f \overset{①}{=} \left(\frac{2}{3}k - k\right) + f = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2}f_4 + \frac{5}{2}f_5\right) + f_4 + f_5 = \frac{1}{3}f_4 + \frac{1}{6}f_5 \quad \| \cdot 6$

$\underline{\underline{12 = 2f_4 + f_5}}$

Anz 4-Ecke	Anz 5-Ecke
6	0
5	2
4	4
3	6
2	8
1	10
0	12

Zusatz: Nicht alle Lösungen müssen existieren!

(4) (a)



(b) F_a ist eine massstäbl. Verkleinerung von F

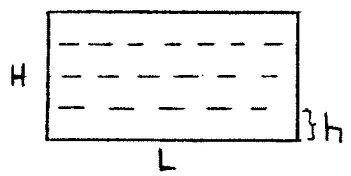
Längenverhältnis $\lambda = \frac{a}{c}$ Flächenverhältnis $\underline{\underline{\frac{F_a}{F} = \lambda^2 = \frac{a^2}{c^2} = \frac{9}{25}}}$

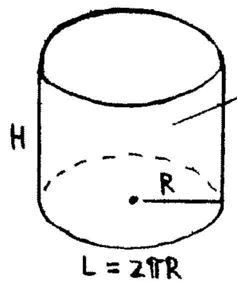
analog: $\underline{\underline{\frac{F_b}{F} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{16}{25}}}$

(c) Gemäss Figur: $F_a + F_b = F$

$F = F_a + F_b = \frac{a^2}{c^2}F + \frac{b^2}{c^2}F \;\| \cdot c^2 \;\leadsto\; c^2 \cdot \cancel{F} = a^2 \cdot \cancel{F} + b^2 \cdot \cancel{F}$ d.h. $\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2}}$

5 (a) Blatt Papier





Zylindervolumen:

$$\mathcal{V} = \pi R^2 \cdot H = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cdot H = \frac{1}{4\pi} L^2 \cdot H$$

Unterteilung in n Streifen:

$$h = \frac{H}{n}, \quad \ell = n \cdot L$$

$$V = \frac{1}{4\pi}\ell^2 \cdot h = \frac{1}{4\pi} n^2 L^2 \cdot \frac{H}{n} = n \cdot \mathcal{V}$$

(i) ja! Das Volumen wächst proportional mit der Anzahl n der Streifen

(ii) $n = \frac{V}{\mathcal{V}} = \frac{48\,km^3}{1.5\,\ell} = \frac{48 \cdot 10^9 \cdot 10^3\,\ell}{1.5\,\ell} = \underline{\underline{3.2 \cdot 10^{13}}}$ (Streifenanzahl)

(b) Mensch: $m_1 = 75$ kg
Oberfl. O_1
Nahrung $n_1 = \frac{1}{50} m_1 = 1.5$ kg

Längenfaktor $\lambda = 8$
Oberflächenfaktor λ^2
Massen-/Vol. faktor λ^3

Riese: $m_2 = \lambda^3 m_1 = 38400$ kg
$O_2 = \lambda^2 O_1 = 64\, O_1$
n_2

(i)
Ann.: n prop O bzw. $\frac{n_1}{O_1} = \text{konst} = \frac{n_2}{O_2} \rightarrow n_2 = n_1 \cdot \frac{O_2}{O_1} = 1.5\,kg \cdot \frac{64\,O_1}{O_1} = 96\,kg$

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{38'400\,kg}{96\,kg} = 400 \rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{400}}} \quad \left(= \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{8}\right)$$

(ii) $\frac{m_2}{m_1} = \lambda^3 \overset{\text{soll}}{=} k$, $\lambda = \sqrt[3]{k}$ $\quad \frac{n_2}{n_1} \overset{\text{Ann}}{=} \frac{O_2}{O_1} = \lambda^2 = \left(\sqrt[3]{k}\right)^2 = k^{2/3}$, Potenz mit $\underline{\underline{p = 2/3}}$

(Empirisch findet man $p = 0.74$ Vgl. E. Schwaiger: Grössenord. in der Natur, S. 34)

---

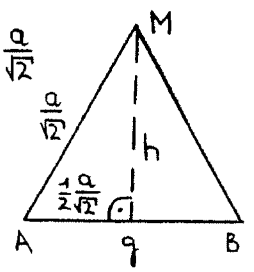
6 Reguläres Sechseck mit Seitenlänge $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{2}}}}$

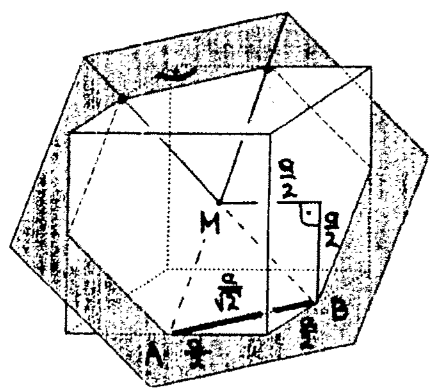
(a) (ABM ist ein gleichseitiges Dreieck)

(b) $F_{Loch} = 6 \cdot F_\Delta = 6 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h$ mit $g = \frac{a}{\sqrt{2}}$

und $h = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{8}}$

$F_{Loch} = 3 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{8}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2}}$





(c) Das 6-Eck der Kragenaussenseite ist eine massstäbl. Vergrösserung des 6-Ecks des Lochs: Längenfaktor $\frac{3}{2}$ → Flächenfaktor $\frac{9}{4}$, d.h. $F_{6\text{-}Eck} = \frac{9}{4} F_{Loch}$

$F_{Kragen} = F_{6\text{-}Eck} - F_{Loch} = \frac{5}{4} F_{Loch} = \underline{\underline{\frac{15\sqrt{3}}{16} a^2}}$ $\quad$ (oder $s_{6\text{-}Eck} = \frac{3}{2} g = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$; $h_{6\text{-}Eck} = \frac{3}{2} h = \frac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{8}}$ ...)

(d) Symmetrie (jede Würfelfläche erfährt eine "Erhöhung" gleicher Art)

Ecken: $e = \overset{\text{Würfel}}{8} + \underset{\text{Eck}}{6} = \underline{14}$ $\quad$ Flächen: $f = 6 \cdot \underset{\text{pro Würfelfläche}}{4} = 24$ $\quad$ Kanten: $k = 6\left(\underset{\text{einfach}}{3} + \overset{\text{"doppelt"}}{\underset{\text{pro Fläche}}{\frac{6}{2}}}\right) = 36$

$(e - k + f = 2\ \checkmark)$